Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 07 de Janeiro de 2013 - 14h30

Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. (a) Sendo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função de classe C^1 definida por $F(x,y,z) = (z - x^2 - y^2, y + z - 1)$, tem-se

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = (0,0)\}.$$

M é uma variedade de dimensão 1 desde que a característica da matriz

$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} -2x & -2y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

seja igual a 2 em qualquer ponto $(x,y,z) \in M$. Se assim não fosse ter-se-ia

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

mas, da definição de M, obtém-se a impossibilidade: $z = \dfrac{1}{4}$ e $z = \dfrac{3}{2}$.

(b) Num ponto $(x,y,z) \in M$ os vectores $(-2x, -2y, 1)$ e $(0,1,1)$ são os respectivos vectores normais. Assim, no ponto $(1,0,1)$ os vectores normais são: $(-2,0,1)$ e $(0,1,1)$. A recta tangente a M no ponto $(1,0,1)$ é dada pelas equações

$$\begin{cases} -2(x-1) + z - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + z = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

(c) Pelo método dos multiplicadores de Lagrange tem-se:

$$\begin{cases} 1 = -2\lambda_1 x \\ 0 = -2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ z = x^2 + y^2 \\ y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2\lambda_1 x \\ 0 = -\lambda_1(2y+1) \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \\ z = x^2 + y^2 \\ y + z = 1. \end{cases}$$

Da segunda equação, obtém-se: $\lambda_1 = 0$ ou $y = -\dfrac{1}{2}$.
Para $\lambda_1 = 0$, da primeira equação obtém-se o absurdo $1 = 0$.
Para $y = -\dfrac{1}{2}$, da quarta e quinta equações vem: $z = \dfrac{3}{2}$ e $x^2 = \dfrac{5}{4}$.
Portanto, $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ é o ponto de M com maior coordenada x.

2. Seja $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ a função de classe C^1 definida por

$$F(x, y, u, v) = (v + xe^y, u + v + ye^x).$$

Dado que se tem

$$\det D_{x,y}F(0, 1, 3, 2) = \det \begin{bmatrix} e^y & xe^y \\ ye^x & e^x \end{bmatrix}_{(x,y,u,v)=(0,1,3,2)} = \det \begin{bmatrix} e & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = e \neq 0,$$

pelo teorema da função implícita, o sistema define implicitamente as variáveis x e y como funções, de classe C^1, das variáveis u e v em alguma vizinhança do ponto $(x, y, u, v) = (0, 1, 3, 2)$.

Notando que

$$DF(0, 1, 3, 2) = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e usando a regra da cadeia obtém-se:

$$\begin{cases} e\dfrac{\partial x}{\partial u}(3, 2) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}(3, 2) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(3, 2) + 1 = 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\frac{\partial y}{\partial u}(3, 2) = -1.$$

3. Pelo Teorema de Stokes, como F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, temos

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot n = \int_{\partial S} F \cdot dg,$$

onde

$$\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = 5, \ x^2 + z^2 = 4\}$$

é percorrida no sentido horário quando vista do ponto $(0, 10, 0)$.

Uma parametrização para esta curva é

$$g(\theta) = (2 \cos \theta, 5, 2 \sin \theta)$$

com $\theta \in (0, 2\pi)$ e, assim,

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F \cdot dg &= \int_0^{2\pi} F(g(\theta)) \cdot \frac{dg}{d\theta}(\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(150 \cos \theta, \frac{e^{80 \cos^2 \theta \sin \theta} - 1}{\sqrt{1 + 4 \sin^2 \theta}}, 50 \sin \theta \right) \cdot (-2 \sin \theta, 0, 2 \cos \theta)\, d\theta \\ &= -200 \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta \, d\theta = 0. \end{aligned}$$

4. Para utilizar o Teorema da Divergência consideramos o conjunto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 4,\ z > 0,\ 0 < y < 2\}.$$

Então, como F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, temos

$$\int_D \operatorname{div} F \, dV_3 = \int_{\partial D} F \cdot n_{\text{ext}},$$

onde n_{ext} é a normal unitária exterior ao sólido D. Como $\partial D = M \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$, com T_1 e T_2 os meio-círculos

$$T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0,\ x^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0\},$$
$$T_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2,\ x^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0\},$$

e T_3 o rectângulo

$$T_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0,\ 0 \leq y \leq 2,\ -2 \leq x \leq 2\},$$

temos

$$\int_{\partial D} F \cdot n_{\text{ext}} = \int_M F \cdot n_{\text{ext}} + \int_{T_1} F \cdot n_{\text{ext}} + \int_{T_2} F \cdot n_{\text{ext}} + \int_{T_3} F \cdot n_{\text{ext}},$$

e assim

$$\int_M F \cdot n_{\text{ext}} = \int_D \operatorname{div} F \, dV_3 - \int_{T_1} F \cdot n_{\text{ext}} - \int_{T_2} F \cdot n_{\text{ext}} - \int_{T_3} F \cdot n_{\text{ext}}.$$

Como $\operatorname{div} F = 7$ temos

$$\int_D \operatorname{div} F \, dV_3 = 7 \operatorname{vol}(D) = 28\pi$$

pois D é metade de um cilindro de raio $r = 2$ e altura $h = 2$, pelo que $\operatorname{vol}(D) = \frac{1}{2}\pi r^2 h = 4\pi$.

Por outro lado, como $n_{\text{ext}} = (0, -1, 0)$ em T_1, temos

$$\int_{T_1} F \cdot n_{\text{ext}} = \int_{T_1} F \cdot (0, -1, 0) = \int_{T_1} (-y) = 0$$

pois $y = 0$ em T_1. Do mesmo modo, como $n_{\text{ext}} = (0, 1, 0)$ em T_2, temos

$$\int_{T_2} F \cdot n_{\text{ext}} = \int_{T_2} F \cdot (0, 1, 0) = \int_{T_2} y = \int_{T_2} 2 = 2 \,\text{área}(T_2) = 4\pi$$

pois $y = 2$ em T_2 e este conjunto é metade dum círculo de raio 2. Finalmente, como $n_{\text{ext}} = (0, 0, -1)$ em T_3, temos

$$\int_{T_3} F \cdot n_{\text{ext}} = \int_{T_3} F \cdot (0, 0, -1) = \int_{T_3} (-4z + \frac{z^2}{2}) = 0$$

pois $z = 0$ em T_3. Conclui-se assim que

$$\int_M F \cdot n_{\text{ext}} = 28\pi - 0 - 4\pi - 0 = 24\pi.$$

3. Como $F = G + \alpha H$ com

$$G(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, z\right) \quad e \quad H(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right),$$

vemos facilmente que F é um campo fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus O_z$. Com efeito,

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial G_2}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial G_1}{\partial z} = \frac{\partial G_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial G_2}{\partial z} = \frac{\partial G_3}{\partial y} = 0$$

e

$$\frac{\partial H_1}{\partial y} = \frac{\partial H_2}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial z} = \frac{\partial H_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_2}{\partial z} = \frac{\partial H_3}{\partial y} = 0.$$

Note-se ainda que G é um gradiente no seu domínio (por exemplo vemos facilmente que $G = \nabla\phi$ com $\phi = \frac{1}{2}(\log(x^2+y^2)+z^2)$).

Por outro lado, em $\mathbb{R}^3 \setminus O_z$, qualquer curva fechada Γ contida no hiperboloide S e percorrida uma só vez ou é homotópica a um ponto ou à circunferência

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = 0,\, x^2+y^2 = 1\}$$

percorrida uma só vez no mesmo sentido que Γ. No primeiro caso, como F é um campo fechado, temos

$$\int_\Gamma F \cdot dg = 0.$$

No segundo caso, como F é um campo fechado e Γ é homotópica a C no domínio de F, temos

$$\int_\Gamma F \cdot dg = \int_C F \cdot dg = \int_C G \cdot dg + \alpha \int_C H \cdot dg = \alpha \int_C H \cdot dg,$$

onde usámos o facto que G é um gradiente para concluir que $\int_C G \cdot dg = 0$.

Uma parametrização para C é

$$g(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

com $\theta \in (0, 2\pi)$ e, assim,

$$\begin{aligned}\int_C H \cdot dg &= \pm \int_0^{2\pi} H(g(\theta)) \cdot \frac{dg}{d\theta}(\theta)\, d\theta \\ &= \pm \int_0^{2\pi} (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta = \pm 2\pi\end{aligned}$$

de acordo com o sentido em que a curva C é percorrida. Conclui-se assim que os possíveis valores para $\int_\Gamma F \cdot dg$ são 0 e $\pm 2\pi\alpha$.