Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 2

TESTE 1A - 24 DE ABRIL DE 2010 - DAS 9H ÀS 10:30H

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$.

(b) Determine a direcção em que f cresce mais rapidamente no ponto $(1,1)$.

(c) Sendo $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável com $g(1,0,2) = (1,1)$ e

$$Dg(1,0,2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

calcule $D(f \circ g)(1,0,2)$.

Resolução:

(a) As funções x e x^2+y^2 são contínuas uma vez que são polinómios. Como a raíz quadrada é contínua e o quociente de funções contínuas é contínua nos pontos onde o denominador não se anula conclui-se que f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Uma vez que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x,0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = -1$$

vemos que não existe o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende para zero, e portanto f não é contínua em $(0,0)$.

(b) A direcção de maior crescimento é dada pelo gradiente da função no ponto. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e portanto a direcção pretendida é a do vector

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

(c) A função f é diferenciável no ponto $(1,1)$ (uma vez que é o quociente de um polinómio pela composta da raíz quadrada com um polinómio e o denominador não se anula), logo, pela regra de derivação da função composta temos

$$\begin{aligned} D(f\circ g)(1,0,2) &= Df(1,1)Dg(1,0,2) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função $f = f(u,v)$ de classe C^2 tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(-1,0) = 3$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(-1,0) = 2$. Sendo h a função definida por $h(x,y) = f(x^2-y, xy)$, calcule $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,1)$.

   Resolução: Pela regra da cadeia temos,
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(x^2-y,xy)(-1) + \frac{\partial f}{\partial v}(x^2-y,xy)x$$
   e aplicando novamente a regra da cadeia temos
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) &= -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x^2-y,xy)(2x) - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(x^2-y,xy)y \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(x^2-y,xy)(2x) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x^2-y,xy)y\right)x + \frac{\partial f}{\partial v}(x^2-y,xy).\end{aligned}$$
   Substituindo $(x,y) = (0,1)$ temos
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,1) = -\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(-1,0) + \frac{\partial f}{\partial v}(-1,0) = -3+2 = -1$$
   onde na segunda igualdade usámos o Lema de Schwarz (que se pode aplicar porque f é de classe C^2) para ver que $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(-1,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(-1,0) = 3$.

3. Mostre que o sistema de equações
$$x + y^3 - z^4 = 2 \quad \text{e} \quad z^2 + x\,z + x\,y = 5.$$
   define y e z como funções de x numa vizinhança do ponto $(x,y,z) = (2,1,1)$. Calcule $\frac{dy}{dx}(2)$.

   Resolução: A função $F(x,y,z) = (x+y^3-z^4-2, z^2+xz+xy-5)$ é de classe C^1 uma vez que as suas componentes são polinómios. Temos $F(2,1,1) = (0,0)$ logo $(2,1,1)$ é uma solução do sistema. Sendo
$$\frac{\partial F}{\partial(y,z)} = \begin{bmatrix} 3y^2 & -4z^3 \\ x & 2z+x \end{bmatrix},$$
   temos
$$\det \frac{\partial F}{\partial(y,z)}(2,1,1) = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 \neq 0.$$
   O Teorema da função implícita garante então a existência de uma vizinhança do ponto $(2,1,1)$ em que o sistema define y e z como funções de x.

   Derivando as equações em ordem a x obtemos o sistema
$$\begin{cases} 1 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 4z^3\frac{dz}{dx} = 0 \\ 2z\frac{dz}{dx} + z + y + x(\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}) = 0 \end{cases}$$
   Substituindo em $x=2$, $y=1$, $z=1$ temos
$$\begin{cases} 1 + 3\frac{dy}{dx}(2) - 4\frac{dz}{dx}(2) = 0 \\ 2\frac{dz}{dx}(2) + 2 + 2(\frac{dz}{dx}(2) + \frac{dy}{dx}(2)) = 0 \end{cases}$$
   Somando as equações e resolvendo em ordem a $\frac{dy}{dx}$ obtemos $\frac{dy}{dx}(2) = -\frac{3}{5}$.

4. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y)=3x^2\,y+y^3-3x^2-3y^2+12.$$

Resolução: Os pontos de estacionaridade são as soluções do sistema

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6xy-6x=0\\ 3x^2+3y^2-6y=0\end{cases}\begin{cases}x=0 \text{ ou } y=1\\ x^2+y^2-2y=0.\end{cases}$$

Este sistema tem por soluções os pontos $(x,y)=(0,0),\ (0,2),\ (-1,1)$ e $(1,1)$. A matriz Hessiana de f é
$$H(f)(x,y)=\begin{bmatrix}6y-6 & 6x\\ 6x & 6y-6\end{bmatrix}$$
e portanto $H(f)(0,0)=\begin{bmatrix}-6 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}$ donde se vê que $(0,0)$ é um ponto de máximo; $H(f)(0,2)=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$ logo $(0,2)$ é um ponto de mínimo; $H(f)(-1,1)=\begin{bmatrix}0 & -6\\ -6 & 0\end{bmatrix}$ tem determinante negativo logo $(-1,1)$ é um ponto de sela; $H(f)(1,1)=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 6 & 0\end{bmatrix}$ tem determinante negativo donde se conclui que $(1,1)$ é um ponto de sela.

5. Considere o conjunto
$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+3\,y>0,\ z=\ln(x+3\,y)\}.$$

(a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

(b) Determine o espaço tangente e o espaço normal a M no ponto $(4,-1,0)$.

(c) Determine uma equação cartesiana do plano tangente a M em $(4,-1,0)$.

Resolução:

(a) M é o gráfico da função $f\colon U\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\ln(x+3y)$ onde U é o aberto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x+3y>0\}$. Como f é de classe C^1 (é a composta da função logaritmo com um polinómio), conclui-se que M é uma variedade de dimensão 2.

(b) A variedade M é o conjunto de nível 0 da função $z-\ln(x+3y)$ logo o seu espaço normal é gerado pelo vector $\nabla(z-\ln(x+3y))=\left(-\frac{1}{x+3y},-\frac{3}{x+3y},1\right)$ no ponto $(4,-1,0)$. Isto é
$$T_{(4,-1,0)}M^\perp=\{a(-1,-3,1)\in\mathbb{R}^3\colon a\in\mathbb{R}\}.$$
O espaço tangente nesse ponto é o complemento ortogonal do espaço anterior e portanto é definido pela equação $(-1,-3,1)\cdot(a,b,c)=0\Leftrightarrow a=-3b+c$, ou seja,
$$T_{(4,-1,0)}M=\{(-3b+c,b,c)\in\mathbb{R}^3\colon b,c\in\mathbb{R}\}.$$

(c) Uma vez que $(-1,-3,1)$ é um vector perpendicular ao plano tangente e este passa pelo ponto $(4,-1,0)$, temos que a equação cartesiana do plano tangente é
$$-(x-4)-3(y+1)+z=0\Leftrightarrow -x+3y+z=-1.$$

6. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a 2 se anulam em $(0,0)$. Mostre que se alguma das terceiras derivadas parciais de f em $(0,0)$ não é nula então $(0,0)$ é um ponto de sela de f.

Resolução: As derivadas parciais em ordem a x são as derivadas da função $x \mapsto f(x,0)$. Se $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0$ temos que a primeira e segunda derivadas desta função se anulam em 0 e que a terceira não se anula. Conclui-se que $f(x,0)$ tem um ponto de inflexão em $x=0$ e consequentemente f tem um ponto de sela em $(0,0)$. Da mesma forma vemos que se $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) \neq 0$, a origem é um ponto de sela.

Suponhamos então que $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) = 0$. Seja $g(t) = f(t,t)$. Usando a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}
g'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0\\
g''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0\\
g'''(0) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)\\
&= 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0)\right).
\end{aligned}$$

Concluímos que se $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) \neq 0$, a função $g(t)$ tem um ponto de inflexão em 0 e portanto $(0,0)$ é um ponto de sela de f. Assim, se uma das duas derivadas parciais mistas de terceira ordem for não nula, haverá um ponto de sela a não ser que a outra tenha o valor simétrico.

Mas repetindo o argumento anterior para a função $h(t) = f(t,2t)$ vemos que, nesse caso $h'''(0) = 2\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) + 4\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) = 2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) \neq 0$ pelo que $(0,0)$ é necessariamente um ponto de sela a não ser que todas as derivadas parciais de ordem 3 de f se anulem.