Exemplos

1) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Veja que a função $u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definida por $u(x,t) = f(x - ct)$, $c \in \mathbb{R}^n$, verifica a equação de transporte

$$c \cdot \nabla_x u + \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{0.1}$$

Resolução: Do teorema de derivação da função composta, a função u é diferenciável por ser a composição de duas funções diferenciáveis. [1]

Além disso pela regra de cadeia

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial y_1}(x - ct)(-c_1) + ... + \frac{\partial f}{\partial y_n}(x - ct)(-c_n) = -\nabla f(x - ct) \cdot c \tag{0.2}$$

Por outro lado

$$\nabla_x u(x,t) \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

onde para cada $i \in \{1, ..., n\}$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_i}(x - ct)$$

Isto é

$$\nabla_x u(x,t) = \nabla f(x - ct) \tag{0.3}$$

Assim, de (0.2) e (0.3) obtemos (0.1).

[1] De facto u é a composição de $f = f(y)$ com $y(x,t) = x - ct$.