Resolução do 1º Teste (13-04-13, 1ª Versão)

1) a) Estudamos a continuidade de f no seu domínio: $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$. Consideramos dois casos.

- Caso em que $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Das propriedades das funções contínuas segue-se que f é contínua neste ponto dado que em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é definida por um quociente de funções contínuas (polinómios) cujo denominador não se anula.
- Caso em que $(x, y) = (0,0)$. A função f será contínua neste ponto se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Dado que

$$f(0,y)\lfloor_{\{y\,>\,0\}} = 0 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$f(x,x)\lfloor_{\{x\,>\,0\}} = 2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$$

concluimos que $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ e portanto f não pode ser contínua na origem.

b) Temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(k,0) - f(0,0)}{k} = 0.$$

Por outro lado, para cada $(x,y) \in \text{dom}(g) = \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{-2yx}{(1+x^2)^2},$$

donde, em particular,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Consequentemente

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$$

2) a) A função g é a composição de f com $h(x,y) = (x^2 - y^2, y^2 - x^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dado que tanto f como h são funções diferenciáveis, concluimos, pelo Teorema da Derivada da Função Composta, que g é diferenciável no seu domínio, isto é, em $\mathbb{R}^2$. Além disso, em particular,

$$Dg(1,0) = \nabla f(h(1,0)) \cdot Dh(1,0) = \nabla f(1,-1) \cdot Dh(1,0)$$

Para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ obtemos que

$$Dh(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ -2x & 2y \end{bmatrix}$$

e assim

$$Dh(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Concluimos então que

$$Dg(1,0) = [2\ 0]$$

Nota: Podiamos ter obtido $Dg(1,0) = \left[\frac{\partial g}{\partial x}(0,0),\ \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\right]$ pela regra da cadeia conforme o raciocínio usado na alínea b)!

b) Usando a notação $f = f(u,v)$ e designando as componentes da função h por $u(x,y) = x^2 - y^2$ e $v(x,y) = y^2 - x^2$, podemos obter, pela regra da cadeia[1], que que para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(h(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(h(x,y))\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(h(x,y))\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(h(x,y))\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

isto é

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(h(x,y))2x - \frac{\partial f}{\partial v}(h(x,y))2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial u}(h(x,y))2y + \frac{\partial f}{\partial v}(h(x,y))2y$$

Consequentemente

$$y\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0.$$

3) Calculamos os pontos críticos de f. Temos que

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} y^2 = 2x \\ 2y(x-1) = 0, \end{cases}$$

donde os pontos procurados são $(x,y) = (0,0)$, $(x,y) = (1,\sqrt{2})$ e $(x,y) = (1,-\sqrt{2})$. Para os classificar usamos o critério baseado no estudo da matriz Hessiana de f nestes pontos. Ora

1

$$\begin{tikzcd} & & & x \\ & & u \arrow[ur] \arrow[r] & y \\ h \arrow[r, leftrightarrow] & f \arrow[ur] \arrow[ddr] & & \\ & & & x \\ & & v \arrow[ur] \arrow[r] & y \end{tikzcd}$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -2 & 2y \\ 2y & 2x-2 \end{bmatrix}$$

Assim, em particular

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

donde concluimos, dado que os valores própios de $H_f(0,0)$ são ambos negativos, que $(0,0)$ é um máximo local de f. Por outro lado

$$H_f(1,\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$H_f(1,-\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Ambas as matrizes têm valores própios $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_1 = -4$. Assim $(x,y) = (1,\sqrt{2})$ e $(x,y) = (1,-\sqrt{2})$ são pontos de sela de f.

4) a) Obtemos primeiro os limites de integração para a variável z. Da definição de X vem que

$$0 < z < x + y < 2.$$

Para obter os outros limites de integração fazemos cortes com z, para $z \in [1,2]$ fixo. As curvas que delimitam este corte (no respectivo plano perpendicular ao eixo OZ) são: $y = z - x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$. Assim é fácil ver que teremos dois cortes diferentes consoante $z \in [0,1]$ ou $z \in [1,2]$. Mais concretamente, se $z \in [0,1]$ então

$$C_z = \{(x,y,z) :\ z < y < 1,\ 0 < x < 1\} \cup \{(x,y,z) :\ 0 < y < z,\ z - y < x < 1\}$$

e se $z \in [1,2]$ então

$$C_z = \{(x,y,z) :\ z - 1 < y < 1,\ z - y < x < 1\}$$

Consequentemente

$$\mathrm{Vol}(X) = \int\int\int_X 1\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \left[\int_z^1 \left[\int_0^1 1\, dx\right] dy + \int_0^z \left[\int_{z-y}^1 1\, dx\right] dy\right] dz$$
$$+ \int_1^2 \int_{z-1}^1 \int_{z-y}^1 y\, dz\, dy\, dx$$

b) Claramente temos que

$$\int\int\int_X y\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x+y} y\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^1 (yx + y^2) dy\, dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right) dx = \frac{7}{12}$$

5) Escrevemos B em coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = y \\ z = \rho\text{sen}\theta \end{cases}$$

onde $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\rho \in (0,1)$ e $y \in (\rho, 2-\rho^2)$. Assim, usando o Teorema de Mudança de Variáveis,

$$\text{Vol}(B) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \int_\rho^{2-\rho^2} \rho \, dy \, d\rho \, d\theta = \frac{5}{12}\pi$$

6) Provar que f é diferenciável em $x = 0$, por definição, equivale a ver que existem $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ para cada $i = \{1, ..., n\}$ e que além disso

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x) - f(0) - \nabla f(0)(x-0)|}{||x||} = 0.$$

Por definição de derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+he_i) - f(0)}{h}$$

(e_i: i-éssimo vector da base canónica de $\mathbb{R}^n$). Ora por hipóteses

$$|f(0)| \leq ||0||^2 = 0,$$

donde $f(0) = 0$. Por outro lado, para cada $i = \{1, ..., n\}$ temos também que

$$|f(0+he_i)| \leq ||he_i||^2 = h^2.$$

Assim

$$\left| \frac{f(0+he_i) - f(0)}{h} \right| = \left| \frac{f(0+he_i)}{h} \right| \leq h$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0.$$

Estudamos finalmente

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x) - f(0) - \nabla f(0)(x-0)|}{||x||}.$$

Temos então que

$$\left| \frac{|f(x) - f(0) - \nabla f(0)(x-0)|}{||x||} \right| = \frac{|f(x)|}{||x||} \leq \frac{||x||^2}{||x||} = ||x||$$

donde

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x) - f(0) - \nabla f(0)(x-0)|}{||x||} = 0.$$

Concluimos portanto que f é diferenciável em $x = 0$.