

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 5

(Derivadas de Ordem Superior. Extremos)

1. Calcule o gradiente e a matriz Hessiana de cada uma das funções seguintes:

a) $f(x, y) = x \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$

b) $f(x, y) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$

c) $f(x, y, z) = e^{xz} \tan(yz)$

2. Mostre que o potencial de Newton $V = -\frac{GMm}{r}$, em que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, verifica a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0; \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

3. Seja $w = f(x + y, x - y)$, em que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 . Mostre que se tem

$$4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

em que $u = x + y$ e $v = x - y$.

4. Determine e classifique os pontos de estacionaridade de cada uma das funções seguintes:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - y^3$

c) $f(x, y) = e^{1+x^2-y^2}$

d) $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$

f) $f(x, y) = y^2 - x^4$

g) $f(x, y) = x^2 - y^3$

h) $f(x, y) = x^2 + xy + \frac{y^6}{12}$