

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 13

(Teorema da Divergência. Teorema de Stokes)

1. Sendo $F(x, y, z) = (-y^2 e^{x+z}, -z, y)$, calcule o fluxo de $\nabla \times F$ através da superfície

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + 2 = y^2 + z^2, x > 0, x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$$

no sentido da normal com primeira componente negativa.

2. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 3 - 3x^2 - 3z^2, y > 0\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_y > 0$. Seja $F(x, y, z) = (0, y^2, -2yz)$. Calcule o fluxo $\int_S F \cdot n$:

- Pela definição.
 - Pelo teorema da divergência.
 - Pelo teorema de Stokes.
3. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, y > 0, z > 0\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_z > 0$. Seja $F(x, y, z) = (x, y - 1, -2z + 1)$. Calcule o fluxo $\int_S F \cdot n$:

- Pelo teorema da divergência.
 - Pelo teorema de Stokes.
4. Usando o teorema de Stokes, calcule o trabalho realizado pelo campo $H(x, y, z) = (-y, x, 3)$, ao longo da elipse definida pelas equações $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{30} = 1$; $z = 0$ e orientada no sentido horário quando vista do ponto $(0, 0, 10)$.

5. Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo vectorial

$$F(x, y, z) = (y + \sin x, \cos y, z^3)$$

ao longo do caminho

$$g(t) = (\cos t, \sin t, \sin 2t); \quad t \in [0, 2\pi].$$

6. Considere a superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 = 1, z > 0\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_z > 0$. Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $G(x, y, z) = (0, 0, 2)$ através de M no sentido de n .

7. Considere o campo vectorial

$$H(x, y, z) = \left(\frac{-2y}{(x-1)^2 + y^2} + yz, \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} + xz, xy \right).$$

- Calcule o trabalho de H ao longo da elipse definida por $2(x-1)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, percorrida no sentido anti-horário para um observador colocado no ponto $(1, 0, 1)$.
- Calcule o trabalho de H ao longo da circunferência definida por $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, $z = 0$.
- Será H um gradiente no seu domínio?