Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Soluções (abreviadas) dos Mini-Testes
MEQ-2s-11-12

(Margarida Baía)

1) Calcule ou mostre que não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right). \tag{1}$$

1ª Resolução:

Seja $f(x,y) = xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$. Estudamos alguns limites direccionais:

$$f(x,0) = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$f(x,x) = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

e em geral

$$f(x,mx) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Assim, caso exista, (1) é zero. Dado que

$$0 \leq |f(x,y)| = \left|xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\right| = |x||y|\frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leq |x||y|\,\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x||y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

concluimos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

2ª Resolução: Dado que

$$\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

e que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$$

concluimos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

2) Calcule $D_{(1,2,3)}f(-1,1,0)$ onde $f(x,y,z) = x^2 - y + e^{yz}$.

1ª Resolução: Como f é uma função diferenciável em particular no ponto $(-1,1,0)$ então[1]

$$D_{(1,2,3)}f(-1,1,0) = Df(-1,1,0)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}. \tag{2}$$

[1] Caso a função não fosse diferenciável neste ponto, não poderiamos usar a fórmula (2).

Dado que

$$Df(x,y,z) = [2x \quad -1+ze^{yz} \quad ye^{yz}]$$

concluimos que

$$D_{(1,2,3)}f(-1,1,0) = -1.$$

2ª Resolução: Em alternativa podia-se ter obtido esta derivada pela definição

$$D_{(1,2,3)}f(-1,1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\big((-1,1,0)+h(1,2,3)\big) - f(-1,1,0)}{h} = -1.$$

3) Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f(x,y) = 6x+3x^2-2y^2+y^4$.
Resolução: Cálculo dos pontos de estacionaridade de f: são os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^3$ tais que $\nabla f(x,y) = (0,0)$. É fácil ver que $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se e só se $(x,y) = (-1,0)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$. Para classificar estes pontos estudamos a matriz Hessiana de f nestes pontos. Temos que

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4+12y^2 \end{bmatrix}$$

Assim

$$H(-1,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

e

$$H(-1,1) = H(-1,-1) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix},$$

de onde concluimos que $(-1,0)$ é um ponto de sela (os valores própios de $H(-1,0)$ têm diferente sinal) e os outros pontos são ambos mínimos locais de f (os valores própios da respectiva matriz Hessiana são ambos positivos).

4) ...

5) Justifique se o seguinte campo vectorial é conservativo

$$h(x,y,z) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, z\right).$$

1ª Resolução: Dado que $\mathrm{dom(h)} = \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^3$ é um domínio simplesmente conexo, ver que h é um campo conservativo em $\mathbb{R}^3$ é equivalente a ver que h é um campo fechado neste domínio. Chamando

$$P(x,y,z) = \frac{2x}{1+x^2+y^2},\ Q(x,y,z) = \frac{2y}{1+x^2+y^2},\ R(x,y,z) = z,$$

por definição h será um campo fechado em $\mathbb{R}^3$ se

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z)$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. É fácil ver que estas igualdades são verdadeiras concluindo o exercício.

2^a *Resolução:* O campo h será conservativo (ou equivalentemente gradiente) em $\mathbb{R}^3$, se existir uma função ϕ de classe um tal que $\nabla\phi(x,y,z) = h(x,y,z)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (isto é um potencial escalar de h). Procuramos então ϕ de modo a que

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (I)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y,z) = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \quad (II)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(x,y,z) = z \quad (III)$$

Integrando em ordem a x em (I) podemos dizer que

$$\phi(x,y,z) = \log(1+x^2+y^2) + C(y,z) \quad (IV)$$

para uma certa função $C = C(y,z)$. Assim, de (IV) e (II) integrando agora em relação a y, vem que

$$\frac{2y}{1+x^2+y^2} = \frac{2y}{1+x^2+y^2} + \frac{\partial C}{\partial y}(y,z),$$

de onde

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = 0$$

e consequentemente

$$C(y,z) = K(z)$$

para uma determinada função $K = K(z)$. Assim,

$$\phi(x,y,z) = \log(1+x^2+y^2) + K(z) \quad (V).$$

Finalmente de (V) e (III) vemos (após integrar em ordem a z) que

$$K(z) = \frac{z^2}{2} + L,$$

$L \in \mathbb{R}$. Concluimos que um potencial escalar para h é por exemplo a função

$$\phi(x,y,z) = \log(1+x^2+y^2) + \frac{z^2}{2}$$

(Nota: Tomamos o valor $L = 0$, mas podia ser outro qualquer...)

6 Calcule por definição o fluxo do campo $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z)$ através do cone

$$C = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 : \quad z = \sqrt{x^2+y^2},\ 0 < z < 1\}$$

orientado com normal n com terceira componente positiva.

Resolução: Usando coordenadas cilíndricas seja

$$g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r),\ 0 < r < 1,\ 0 < \theta < 2\pi,$$

uma parametrização de C. Temos que por definição o fluxo pedido é

$$\int\int_C F\cdot n\, dS = \pm\int_0^1\int_0^{2\pi} F(r,\theta)\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial r}\times\frac{\partial g}{\partial\theta}\right) d\theta\, dr$$

(Nota: sendo $+$ se n e $\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}$ têm o mesmo sentido). Assim, dado que

$$\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = (-r\cos\theta, -r\operatorname{sen}\theta, r),$$

temos que

$$\int\int_C F \cdot n \, dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} F(r,\theta) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}\right) d\theta \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^4([\cos\theta]^4 + [\operatorname{sen}\theta]^4) + r^2 \, d\theta \, dr = \frac{11\pi}{30}.$$

Sugestão: Use as fórmulas trigonométricas do $\operatorname{sen} x^2$ e $\cos x^2$ para o cálculo deste integral. Na verdade este exercício teria sido mais simples se tivessemos usado o Teorema da Divergência para o cálculo do fluxo pedido. Exercício: Experimente desta forma...