Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 6

(Integrais de Campos Escalares em Variedades. Trabalho. Campos Gradientes. Potenciais)

1. Parametrize as seguintes variedades:

   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$.

   b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = \tan x \,; \, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$.

   c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 1 \,; \, y > |x| \,; \, |z| < 2\}$.

   d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 < z = 1 - x^2 - y^2\}$.

   e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; (\sqrt{x^2+y^2} - 4)^2 + z^2 = 1 \,; \, z > 0\}$.

   f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,; \, z > \frac{1}{2}\}$.

   g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = z^2 + 1 \,; \, |z| < 1\}$.

2. Calcule o comprimento do arco de curva $y^2 = x^3$ entre os pontos $(1,1)$ e $(4,8)$.

3. Calcule o comprimento do arco de curva $x^2 + y^2 = 1$ entre os pontos $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(1,0)$.

4. Calcule o comprimentos do arco de curva $\alpha(t) = (1, t, t^2)$ entre os pontos $(1,0,0)$ e $(1,1,1)$.

5. Calcule a área do cilindro dado pelas equações $x^2 + y^2 = 1$ e $0 \le z \le 2$.

6. Calcule a área da superfície
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}, \; \sqrt{3}|y| < |x|, \; z > 0\}.$$

7. Considere a variedade-1 definida por
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, \; 2x + 2y + z = -1\},$$
e com densidade de carga eléctrica por unidade de comprimento dada por
$$\alpha(x,y,z) = \sqrt{5 - 8(x+1)(y+1)}.$$
Calcule a carga eléctrica total de C.

8. Considere a variedade-2
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = (x^2+y^2)^2, \; x^2 + y^2 < 1\},$$
com densidade de massa dada por $\sigma(x,y,z) = \sqrt{1 + 16(x^2+y^2)^3}$. Calcule a massa total de S.

9. Considere a superficíe
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy, \; 1 < x < 2, \; 1 < y < 2\},$$
com densidade de massa dada por $\alpha(x,y,z) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2+y^2}}$. Calcule o momento de inércia de B relativamente ao eixo Ox.

10. Determine se os campo vectoriais $f(x,y) = (x-2, xy)$ e $g(x,y,x) = (zy, xy^2, xz)$ são campos fechados nos seus respectivos domínios. São campos gradientes?

11. Considere os campos vectoriais seguintes:

$$\begin{cases} f(x,y) &= (x+y, x-2), \\ g(x,y) &= (3+2xy, x^2-3y^2). \end{cases}$$

Determine se f e g são ou não campos gradientes. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

12. Considere o campo vectorial $f(x,y) = (-y, x)$.

a) Calcule o trabalho realizado pelo campo f ao longo da elipse de equação $x^2 + 4y^2 = 1$, orientada no sentido anti-horário.

b) Calcule o trabalho realizado por f ao longo da linha poligonal que une os pontos $(1,0)$, $(0,0)$ e $(0,1)$.

c) Represente geometricamente o campo f e, sem efectuar os cálculos, confirme o resultado da alínea anterior.

13. Calcule o trabalho do campo vectorial $h(x,y,z) = (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2)$ ao longo do caminho $g(t) = (t, t^2, t), t \in]-1, 1[$.

14. Considere os campos vectoriais seguintes:

$$\begin{cases} f(x,y,z) &= (e^x, e^y, e^z), \\ g(x,y,z) &= (e^{yz}, xze^{yz}, xye^{yz}), \\ h(x,y,z) &= (\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, z). \end{cases}$$

a) Determine se f, g e h são ou não conservativos. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

b) Calcule o trabalho de f, g e h ao longo da curva definida pelas equações $y = x^3$, $z = 0$, percorrida desde o ponto $(0,0,0)$ até ao ponto $(1,1,0)$.

15. Calcule o trabalho de $f(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$ ao longo da elipse definida por $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{20} = 1$, percorrida no sentido anti-horário. Será f um gradiente no seu domínio ?