

## Cálculo Diferencial e Integral II

### Ficha de trabalho 5

(Teorema de Fubini. Mudança de Variáveis de Integração) (7-11-09)

1. Calcule  $\int \int_R y^2(1 + xy^2) dx dy$  onde  $R = [-1, 1] \times [0, 1]$ .
2. Calcule  $\int \int_R y \cos x + 2 dx dy$ , onde  $R = [0, \pi/2] \times [0, 1]$ .
3. Calcule  $\int \int \int_R xy + 2y + 3z dx dy dz$ , onde  $R = [0, 1] \times [-1/2, 0] \times [0, 1/3]$ .
4. Calcule

$$\int_0^3 \left( \int_{-x^2+1}^{x^2+1} xy dy \right) dx.$$

5. Invertendo a ordem de integração, calcule

$$\int_0^1 \left( \int_{3y}^3 e^{x^2} dx \right) dy$$

e

$$\int_0^1 \left( \int_0^{\arcsen y} y \sen x dx \right) dy.$$

6. Calcule

$$\int \int_R x \cos(x + y) dx dy,$$

sendo  $R$  a região triangular de vértices  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$  e  $(\pi, \pi)$ .

7. Calcule

$$\int_0^1 \left( \int_0^x \left( \int_{x^2+y^2}^2 3 dz \right) dy \right) dx.$$

Esboce a região de integração.

8. Calcule através de um duplo integral o volume da pirâmide limitada pelos três planos coordenados e o plano  $x + 2y + 3z = 6$ .
9. Considere a região

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z \leq 1, x + y - 2z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Indique qual a função que deve integrar para obter o volume de  $V$  através de um integral triplo. Escreva uma expressão para o volume de  $V$  na forma

$$\int_{\dots}^{\dots} \left( \int_{\dots}^{\dots} \left( \int_{\dots}^{\dots} \dots dx \right) dy \right) dz,$$

e calcule-o.

10. Considere a região

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}.$$

Escreva expressões para o volume de  $U$  na forma:

a)  $\int \dots \left( \int \dots \left( \int \dots \dots dx \right) dy \right) dz.$

b)  $\int \dots \left( \int \dots \left( \int \dots \dots dz \right) dy \right) dx.$

11. Considere a região

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x, x \leq 1\}.$$

Escreva expressões para o volume de  $A$  na forma:

a)  $\int \dots \left( \int \dots \left( \int \dots \dots dz \right) dy \right) dx.$

b)  $\int \dots \left( \int \dots \left( \int \dots \dots dx \right) dy \right) dz.$

12. Considere a região

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2\},$$

com densidade de massa dada por  $\alpha(x, y, z) = z^2$ .

a) Escreva uma expressão para a coordenada  $z$  do centro de massa de  $V$  utilizando integrais da forma

$$\int \dots \left( \int \dots \left( \int \dots \dots dx \right) dy \right) dz.$$

b) Calcule a massa total de  $V$ .

c) Calcule a coordenada  $z$  do centro de massa de  $V$ .

13. Considere a região

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z^2 \leq x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\},$$

com densidade de massa dada por  $\alpha(x, y, z) = (x^2 + y^2)z^2$ .

a) Calcule a massa de  $U$  utilizando coordenadas esféricas e coordenadas cilíndricas.

b) Calcule o momento de inércia de  $U$  relativamente ao eixo  $Oz$ .

14. Calcule o volume da região  $B \subset \mathbb{R}^3$  definida pelas condições

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 4 - 2(x^2 + y^2), & \text{se } 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 3 - (x^2 + y^2), & \text{se } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3. \end{cases}$$

15. Utilizando coordenadas polares, calcule a área da região

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}.$$

16. Considere o conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1, 0 < y < x\},$$

e seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = e^{-(x+y)^4}(x^2 - y^2)$ .

Calcule  $\int_D f$  utilizando uma transformação de coordenadas apropriada. Justifique cuidadosamente.

17. Calcule o volume do elipsoide de equação  $x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ .

18. Considere o sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq y \leq (x^2 + z^2)^{\frac{1}{4}}, x \geq 0, z \geq 0\},$$

com densidade de massa dada por  $\alpha(x, y, z) = e^y$ . Calcule a massa total de  $S$ .

19. Calcule o volume da região

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

20. Calcule a massa total de

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 + z^2, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}.$$

sabendo que a densidade de massa deste sólido é dada por  $\alpha(x, y, z) = 1 + z^2$ .