

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 4

(Variedades. Espaço Tangente. Espaço Normal. Extremos Condicionados. Parametrizações.) (7-11-09)

1. Mostre que cada um dos conjuntos seguintes é uma variedade e determine a respectiva dimensão:

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$.
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \tan x; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$.
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; y > |x|; |z| < 2\}$.
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = 1 - x^2 - y^2\}$.
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 = 1; z > 0\}$.
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; z > \frac{1}{2}\}$.
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1; |z| < 1\}$.

2. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x = y, x > 0\}.$$

- Mostre que A é uma variedade e determine a sua dimensão.
- Determine um vector tangente a A no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

3. Sejam

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4x^2 + y^2, y = x^2\}$$

e

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2, 0 < z < 1, -2 < x < 2\}.$$

- Verifique que M é uma variedade e determine a sua dimensão.
- Determine o espaço normal a M no ponto $(1, 1, 5)$.
- Determine um vector tangente à variedade N no ponto $(0, 0, 1/2)$.

4. Determine a recta normal e o plano tangente ao cone

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

no ponto $(3, 4, -2)$.

5. Determine o espaço tangente e o espaço normal à variedade

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; z = x^2 - y^2\},$$

no ponto $(1, 0, 1)$.

6. Determine o espaço tangente e o espaço normal à variedade

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2; x^2 + y^2 < 2\},$$

no ponto $(1, 0, 1)$.

7. Para cada um dos casos seguintes, determine os extremos da função f no conjunto S :

a) $f(x, y, z) = x + y + z$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2; x + z = 1\}$.

b) $f(x, y, z) = xyz$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

8. Considere a variedade

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2, x < 4\}.$$

a) Determine a sua dimensão.

b) Determine o espaço normal a M no ponto $(2, 1, 1)$.

c) Determine os possíveis extremos da função $f(x, y, z) = 3x + y^2 - 6z$ restrita a M .

9. Use o Método dos Multiplicadores de Lagrange para determinar os pontos de máximo da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ no disco de raio 1 e centro na origem de \mathbb{R}^2 .

10. Determine os extremos absolutos da função $f(x, y, z) = x + y - z$ que se encontram na bola $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

11. As faces de uma caixa rectangular sem tampa têm área total igual a 16 m^2 . Determine as dimensões da caixa que maximizam o respectivo volume.

12. Determine os extremos da função $f(x, y, z) = x + y + z$ na superfície definida por $xyz = 1$.