

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 3 (20-10-09)

(Noção de caminho. Propriedades do vector gradiente. Teorema de Lagrange. Derivadas de Ordem Superior. Extremos. Função Inversa. Função Implícita)

1. Determine o valor máximo que uma derivada direccional de $f(x, y, z) = x^2 - 2xy + z^3$ no ponto $(1, -1, 2)$ pode tomar.
2. Calcule um vector normal ao gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$ no ponto $(1, 0)$. Escreva a equação do plano tangente a $z = f(x, y)$ neste ponto.
3. Determine a recta tangente e o plano normal à linha definida por

$$\left\{ \left(\cos t, \sin t, \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right) ; -\pi \leq t \leq \pi \right\}$$

no ponto $(1, 0, 0)$. Determine os pontos desta linha mais afastados da origem.

4. Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \log \left(\frac{x+y}{2} \right)$. Aplique o Teorema de Lagrange para provar que

$$\log \left(\frac{x+y}{2} \right) \geq 1 - \frac{2}{x+y}, \quad x+y \geq 2.$$

Sugestão: Considere $p = (1, 1), q = (x, y)$.

5. Calcule a matriz Hessiana de cada uma das funções seguintes:

a) $f(x, y) = x \arctan \left(\frac{x}{y} \right)$

b) $f(x, y) = \cos \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)$

c) $f(x, y, z) = e^{xz} \tan(yz)$

6. Mostre que o potencial de Newton $V = -\frac{GMm}{r}$, em que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, verifica a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

7. Seja $w = f(x+y, x-y)$, em que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 . Mostre que se tem

$$4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

em que $u = x+y$ e $v = x-y$.

8. Obtenha os polinómios de Taylor de primeira e segunda ordem da função $f(x, y) = e^{x+y}$ no ponto $(0, 0)$. Obtenha valores aproximados de $f(1, 3)$ e de $f(0.001, 0.001)$ usando estes polinómios. Compare os valores obtidos com o valor exacto da função. Indique o erro cometido.
9. Determine e classifique os pontos críticos de cada uma das funções seguintes:
 - a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$
 - b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$
 - c) $f(x, y) = e^{1+x^2-y^2}$

d) $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$

10. Determine os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ no disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

11. Determine os valores de dois parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$ de modo a que a função

$$f(x, y) = e^{ax+by^2} + b \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$$

tenha um extremo no ponto $(0, 0)$ e o polinómio de Taylor do segundo grau de f na origem tome o valor 6 no ponto $(1, 2)$. Classifique o ponto $(0, 0)$ para os valores obtidos.

12. Para cada um dos casos seguintes determine o conjunto dos pontos do domínio de f em que o respectivo Jacobiano é não nulo. Determine se f é injectiva no respectivo domínio. Descreva o conjunto $f(S)$. Se f for injectiva em S , determine f^{-1} explicitamente.

a) $f(x, y) = (x + 2y, x - y)$, $S = \mathbb{R}^2$.

b) $f(x, y) = \left(\log xy, \frac{1}{(x^2 + y^2)} \right)$, $S = \{(x, y) : 0 < y < x\}$.

13. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$.

a) Mostre que f não é injectiva.

b) Determine, justificadamente, o conjunto de pontos em que f tem inversa local.

c) Determine a matriz Jacobiana, no ponto $(2, 0)$, de uma das funções inversas locais f^{-1} da função f .

14. O tempo t e as coordenadas (x, y) de um ponto em movimento no plano satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= e^{2t} + 1 \\ x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) &= t. \end{cases}$$

a) Mostre que este sistema define, numa vizinhança do ponto $(t_0, x_0, y_0) = (1, 1, e)$, uma função de classe C^1 , dada por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)).$$

b) Calcule $\alpha'(1)$.

15. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} u &= xy + \operatorname{sen}(x + y) \\ v &= e^{-x+y-2} + \frac{x}{y}. \end{cases}$$

Mostre que existe uma vizinhança de $(u, v) = (-1, 0)$ e uma vizinhança de $(x, y) = (-1, 1)$ em que o sistema define (x, y) como função, de classe C^1 , de (u, v) e calcule $\frac{\partial x}{\partial u}(-1, 0)$.

16. Considere a equação $x^3 + y^3 - 3xy = 1$.

(a) Mostre que as soluções da equação acima indicada, numa vizinhança suficiente pequena do ponto $(1, 0)$, definem uma função $y = g(x)$ de classe C^1 .

(b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico da função g (definida na alínea anterior) no ponto $x = 1$.

17. Mostre que a equação $x \cos(xy) = 0$ define, implicitamente, y como função de x em alguma vizinhança do ponto $(1, \frac{\pi}{2})$ e calcule a derivada $\frac{dy}{dx}(1)$.

18. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x - y)$$

e o conjunto

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = (2, 0)\}.$$

Use o teorema da função implícita para justificar que, numa vizinhança do ponto $(1, 1, 0)$, o conjunto C é o gráfico de uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, em que I é um intervalo aberto em \mathbb{R} .

19. Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e suponhamos que a equação $F(x, y, z) = 0$ determina cada uma das variáveis como função das restantes, ou seja,

$$x = x(y, z) ; y = y(x, z) ; z = z(x, y).$$

Mostre que se tem

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -1$$

20. Considere o sistema

$$\begin{cases} xz^3 + y^2u^3 = 1 \\ 2xy^3 + u^2z = 0 \end{cases}$$

- Mostre que este sistema define x e y como funções implícitas diferenciáveis de z e u , $x = x(z, u)$ e $y = y(z, u)$, numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0, 1, 0, 1)$.
- Estude a invertibilidade da função $g(z, u) = (x(z, u), y(z, u))$ numa vizinhança de $(z_0, u_0) = (0, 1)$.