Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 2

(Diferenciabilidade. Derivada da Função Composta) (2 de Outubro de 2009)

1. Usando a definição, calcule a derivada no ponto P segundo o vector $\mathbf{v}$ da função seguinte:
   $f(x,y) = x^y$; $P = (1,1)$; $\mathbf{v} = (0,1)$

2. Calcule as derivadas parciais de cada uma das funções seguintes:

   a) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

   b) $g(x,y) = \log\sqrt{1+xy}$

   c) $h(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

3. Calcule as derivadas parciais na origem da função seguinte:
   $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x+y^4}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

4. Calcule a matriz Jacobiana da função $f(x,y,z) = (x^2, xz-y, z^4)$.

5. Determine um campo escalar $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi = F$, onde

$$F(x,y,z) = (2x + ye^{xy}, z + xe^{xy}, y).$$

6. Calcule a matriz Jacobiana de cada uma das funções seguintes:

   a) $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{y}, xy\right)$

   b) $g(x,y,z) = (\sqrt{yz}, e^{xyz})$

7. Determine um vector segundo o qual a derivada direccional da função $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, no ponto $(1,1)$ é nula.

8. Calcule a derivada no ponto P segundo o vector $\mathbf{v}$ da função seguinte:
   $g(x,y,y) = e^x + yz$; $P = (1,1,1)$; $\mathbf{v} = (1,-1,1)$

9. Considere as funções:

   i) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   ii) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Qual destas funções é diferenciável na origem? Justifique

10. Considere a função f dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Calcule a derivada de f no ponto $(1,0)$ na direcção do vector $(1,2)$.

(b) Calcule a derivada de f no ponto $(0,0)$ na direcção do vector $(1,2)$.

11. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $a \in \mathbb{R}^n$. Mostre que f é contínua em a.

12. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável tal que $\nabla f(x,y) = 0$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que f é constante.

13. Calcule a derivada $D(f \circ g)(1,1)$ em que
$$f(u,v) = (\tan(u-1) - e^v, u^2 - v^2)\,; \quad g(x,y) = (e^{x-y}, x-y).$$

14. Considere as funções $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ e $\sigma(t) = F(\gamma(t))$. Calcule a derivada $\sigma'(t)$.

15. Calcule a derivada parcial $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ em que
$$h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))\,; \quad f(u,v) = \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}\,; \quad u(x,y) = e^{-x-y}\,; \quad v(x,y) = e^{xy}$$

16. Considere a função $f(x,y,z) = e^x yz$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $g(0,0) = (0,1,2)$ e
$$Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Calcule a derivada direccional $D_v(f \circ g)(0,0)$ em que $\vec{v} = (1,2)$.

17. Sejam $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e tais que se verifica a equação $F(x, g(x)) = 0$. Supondo que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$ calcule a derivada $g'(x)$.