

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 1 (10-09-09)

(Esboço de Conjuntos. Topologia. Limites. Continuidade)

1. Esboce os conjuntos seguintes:

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1; x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$
- (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(x + y) = 1\}$
- (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 2; x > 1; y > 0; z > 0\}$
- (f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 1; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
- (g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > \sqrt{x^2 + y^2}; x + y + 2z \leq 2\}$
- (h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2; y = 1\}$
- (i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = |x|\}$

2. Esboce os cortes perpendiculares aos eixos coordenados dos seguintes conjuntos:

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 2; x > 1; y > 0; z > 0\}$
- (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 1; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
- (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > \sqrt{x^2 + y^2}; x + y + 2z \leq 2\}$

3. Para cada um dos seguintes conjuntos determine o interior, o exterior e a fronteira e diga, justificando, se é aberto, fechado, limitado ou compacto.

- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$
- b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(xy) \leq 0\}$
- c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z < 1\}$
- d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; y = x\}$

4. Calcule ou mostre que não existem os limites seguintes:

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$
- b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{(x-2)^2 y^2}{(x-2)^2 + y^2}$
- c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$
- d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \sin(x^2 + y^2)$
- e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
- f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \ln(xy)$. (**Sugestão:** Considere a linha dada por $y = e^{-1/x^2}$).

5. Estude as funções seguintes quanto à continuidade:

- a) $f(x, y) = e^{x^2+3y}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$$\text{c) } f(x, y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x, y) = \begin{cases} xy^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right), & \text{se } y \neq 0 \\ 0, & \text{se } y = 0 \end{cases}$$