Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste/1º Exame - 26 de Junho de 2009
(MEEC e MEAmbi)
Resolução abreviada

1. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de f na origem.
R: Temos que

$$\left| xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\right| \leq |xy|, \quad \forall (x,y) \neq (0,0).$$

Assim

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

o que implica, por definição, que f é contínua na origem.

b) Obtenha $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
R: Por definição

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

c) Estude a diferenciabilidade de f na origem.
R: Por definição devemos ver se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)|}{||(x,y)||} = 0.$$

Dado que

$$\frac{|f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)|}{||(x,y)||} = \frac{|xy||x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^{3/2}} \leq (x^2+y^2)^{1/2},$$

segue-se de facto que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)|}{||(x,y)||} = 0$$

o que implica, por definição, que f é diferenciável na origem.

d) Dada uma função diferenciável $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(1,1) = (1,0)$ e $Dg(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, calcule $D(f\circ g)(1,1)$.

R: Pelo teorema da função composta, e dado que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, temos que

$$D(f\circ g)(1,1) = Df(g(1,1))\cdot Dg(1,1) = \nabla f(1,0)\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [0\ 1]\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [0\ 2]$$

2. Determine e classifique os extremos de $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + x^2y$.

R: Calculemos primeiro os pontos críticos de f. Temos que $\nabla f(0,0) = (0,0)$ se e só se

$$4x + 2xy = 0$$

e

$$2y + x^2 = 0,$$

i.e, se e só se $(x,y) = (0,0)$ ou $(x,y) = (2,-2)$ ou $(x,y) = (-2,-2)$.

Para determinar a natureza destes pontos calculamos a matriz Hessiana de f. Temos que

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4+2y & 2x \\ 2x & 2 \end{bmatrix}.$$

Estudo do ponto $(x,y) = (0,0)$. Como

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

segue-se que é um ponto de mínimo local para f.

Estudo do ponto $(x,y) = (2,-2)$. Como

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

segue-se que é um ponto de sela para f.

Estudo do ponto $(x, y) = (-2, -2)$. Como

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

segue-se que é um ponto de sela para f.

3. Considere o sistema

$$\begin{cases} xz^3 + y^2u^3 = 1 \\ 2xy^3 + u^2z = 0 \end{cases}$$

a) Mostre que este sistema define x e y como funções implícitas diferenciáveis de z e u, $x = x(z, u)$ e $y = y(z, u)$, numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0, 1, 0, 1)$.

R: Consideramos $F(x, y, z, u) = (xz^3 + y^2u^3 - 1, 2xy^3 + u^2z) \in C^1(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^2)$. Temos que $F(0, 1, 0, 1) = (0, 0)$ e além disso

$$\det \left[\frac{\partial(F_1,\, F_2)}{\partial(x,\, y)} \right] (0, 1, 0, 1) \neq 0,$$

onde $F_1(x, y, z, u) = xz^3 + y^2u^3 - 1$ e $F_2(x, y, z, u) = 2xy^3 + u^2z$. Pelo teorema da função implícita, podemos concluir então que este sistema define x e y como funções implícitas diferenciáveis de z e u, $x = x(z, u)$ e $y = y(z, u)$, numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0, 1, 0, 1)$.

b) Estude a invertibilidade da função $g(z, u) = (x(z, u), y(z, u))$ numa vizinhança de $(z_0, u_0) = (0, 1)$.

R:

Pelo teorema da função inversa bastará verificar que

$$\det Dg(0, 1) \neq 0. \tag{1}$$

Pode-se ver[1] que

$$Dg(0,0) = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

pelo que (1) é satisfeito.

4. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(tx) = t^m f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $t > 0$ (homogeneidade de grau m). Assumindo que f é diferenciável, mostre que para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\nabla f(x) \cdot x = m\, f(x).$$

[1] Semelhante à resolução do 1º Teste...

R: Se $f(tx) = t^m f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $t > 0$, então, derivando em ordem a t, obtemos que

$$\nabla f(tx) \cdot x = mt^{m-1} f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $t > 0$. Em particular se $t = 1$ obtemos que

$$\nabla f(x) \cdot x = m\, f(x)$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

5. Considere a variedade

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2,\, x < 4\}.$$

a) Determine o espaço normal a M no ponto $(2, 1, 1)$.

R:

$$\left[T_{(2,1,1)}M\right]^T = \langle\, \nabla F(2, 1, 1)\, \rangle$$ [2]

onde $F(x, y, z) = x - y^2 + z^2$. Isto é

$$\left[T_{(2,1,1)}M\right]^T = \langle (1, -2, -2) \rangle$$

b) Determine os possíveis extremos da função $f(x, y, z) = 3x + y^2 - 6z$ restrita a M.

R: Pelo teorema dos multiplicadores de Lagrange, uma condição necessária para que um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ seja um extremo de $f(x, y, z) = 3x + y^2 - 6z$ restrita a M é que exista $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla F(x, y, z) \\ F(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Pode-se ver que o sistema (2) é verificado se e só se $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ (com $\lambda = 3$). Assim, este o único possível ponto de extremo de $f\lfloor_M$.

c) Identifique o bordo de M e justifique que é uma variedade. Indique a sua dimensão.

R:

O bordo de M é o conjunto

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y^2 + z^2,\, x = 4\}.$$ [3]

Pode-se ver que é uma variedade-1 de $\mathbb{R}^3$. Com efeito basta observar que

[2] $< v >$ significa o espaço linear gerado por v...

[3] Circunferência em $\mathbb{R}^3$.

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ F(x,y,z) = (0,0)\}$$

onde $F(x,y,z) = (x - y^2 + z^2, x - 4)$, e que além disso $F \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)$ e

$$\mathrm{Car} DF(x,y,z) = 2$$

para cada ponto $(x,y,z) \in C$.

d) Estude se o campo $F(x,y,z) = (e^x, y, z^2)$ é gradiente. Calcule o trabalho realizado por F ao longo do bordo de M percorrido no sentido horário quando visto do ponto $(10,0,0)$.
R: Pode-se ver (usando a definição) que F é um campo fechado em $\mathbb{R}^3$. Como em $\mathbb{R}^3$ ambas as noções são equivalentes (por ser um dominio simplesmente conexo), segue-se que F é um campo gradiente em $\mathbb{R}^3$. Assim o trabalho ao longo de C realizado por F é nulo (independentemente da orientação de C) dado que C é uma curva fechada.

e) Usando o teorema de Stokes calcule o trabalho realizado pelo campo

$$G(x,y,z) = (-2yz, 0, 0)$$

ao longo do bordo de M percorrido no sentido anti-horário quando visto do ponto $(10,0,0)$.
R:
Seja

$$N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ y^2 + z^2 < x,\ x = 4\}$$

(tem o mesmo bordo que M). Usando o teorema de Stokes

$$\int_C F \cdot dg = Fluxo_N(rot(G)) = \int\int_N (0, -2y, 2z) \cdot (1,0,0) dS = 0.$$

Nota: Também pode ser feito usando a variedade M!

6. Calcule o volume do sólido

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ -2 < z < 2\}.$$

R: Usando coordenadas cilindricas
$Vol(V) = \int_0^{2\pi} \int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \rho\, d\rho dz d\theta$

7. Calcule o fluxo de $F(x,y,z) = (x + \cos(e^{z+y}), y^2, -(2y+1)z)$ ao longo da superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ -2 < z < 2\}.$$

orientada com normal n tal que $n_z > 0$ nos pontos com coordenada z positiva $(Fluxo_S(F))$.

R: Como $div(F) = 0$, então do teorema da divergência aplicado a

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 < 9,\ -2 < z < 2\},$$

vem (dado que $\partial D = S \cup S_1 \cup S_2$) que

$$\int\int_S F \cdot n^e \, dS + \int\int_{S_1} F \cdot n^e \, dS + \int\int_{S_2} F \cdot n^e \, dS = 0$$

onde

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 < 5,\ z = 2\}$$

e

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 < 5,\ z = -2\}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
Fluxo_S(F) &= -\int\int_{S_1} F \cdot n^e \, dS - \int\int_{S_2} F \cdot n^e \, dS \\
&= -\int\int_{S_1} (x + \cos(e^{z+y}), y^2, -(2y+1)z) \cdot (0, 0, 1) \, dS \\
&\quad -\int\int_{S_2} (x + \cos(e^{z+y}), y^2, -(2y+1)z) \cdot (0, 0, -1) \, dS \\
&= \int\int_{S_1} 2(2y+1)z \, dS - \int\int_{S_2} 2(2y+1)z \, dS.
\end{aligned}$$

Considerando $g_1(r, \theta) = (rcos\theta, rsen\theta, 2)$, $g_2(r, \theta) = (rcos\theta, rsen\theta, -2)$, $r \in [0, \sqrt{5}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, parametrizações de S_1 e S_2 respectivamente, obtemos que

$$\int\int_{S_1} 2(2y+1)z \, dS = \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{2\Pi} 4(2rsen\theta + 1)r \, d\theta dr$$

$$\int\int_{S_2} 2(2y+1)z \, dS = -\int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{2\Pi} 4(2rsen\theta + 1)r \, d\theta dr$$

donde

$$Fluxo_S(F) = 8 \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{2\Pi} (2rsen\theta + 1)r \, d\theta dr$$

8. Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e D um domínio regular, $D \subset U$. Para cada $u : U \to \mathbb{R}$, $u \in C^2$ definimos o Laplaciano de u por

$$\Delta u = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right].$$

a) Mostre que $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$ para todo o ponto $(x, y, z) \in U$.
R: Por definição
$\operatorname{div}(\nabla u)(x, y, z) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial z})\right](x, y, z) = \Delta u(x, y, z)$

b) Mostre que não pode existir nenhuma função $u \in C^2(R)$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } D \\ \nabla u \cdot n = 1 & \text{em } \partial D, \end{cases}$$

onde n é a normal unitária à ∂D exterior em relação a D.
R: Se existisse uma tal função, aplicando o teorema da divergência chegariamos a que

$$\int\int\int_D \operatorname{div}(\nabla u) dxdydz = \int\int_{\partial D} \nabla u \cdot ndS$$

o que é uma contradição pois levaria a que $0 = 1$!!!