

Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste/1º Exame - 26 de Junho de 2009

(MEEC e MEAmbi)

Resolução abreviada

1. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de f na origem.

R: Temos que

$$\left| xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \right| \leq |xy|, \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

Assim

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0),$$

o que implica, por definição, que f é contínua na origem.

b) Obtenha $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

R: Por definição

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0$$

c) Estude a diferenciabilidade de f na origem.

R: Por definição devemos ver se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)|}{\|(x, y)\|} = 0.$$

Dado que

$$\frac{|f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)|}{\|(x, y)\|} = \frac{|xy||x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \leq (x^2 + y^2)^{1/2},$$

segue-se de facto que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x,y)|}{\|(x,y)\|} = 0$$

o que implica, por definição, que f é diferenciável na origem.

- d) Dada uma função diferenciável $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(1,1) = (1,0)$ e $Dg(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, calcule $D(f \circ g)(1,1)$.

R: Pelo teorema da função composta, e dado que f é diferenciável em \mathbb{R}^2 , temos que

$$D(f \circ g)(1,1) = Df(g(1,1)) \cdot Dg(1,1) = \nabla f(1,0) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [0 \ 2]$$

2. Determine e classifique os extremos de $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + x^2y$.

R: Calculemos primeiro os pontos críticos de f . Temos que $\nabla f(0,0) = (0,0)$ se e só se

$$4x + 2xy = 0$$

e

$$2y + x^2 = 0,$$

i.e, se e só se $(x,y) = (0,0)$ ou $(x,y) = (2,-2)$ ou $(x,y) = (-2,-2)$.

Para determinar a natureza destes pontos calculamos a matriz Hessiana de f . Temos que

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4 + 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{bmatrix}.$$

Estudo do ponto $(x,y) = (0,0)$. Como

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

segue-se que é um ponto de mínimo local para f .

Estudo do ponto $(x,y) = (2,-2)$. Como

$$H_f(2,-2) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

segue-se que é um ponto de sela para f .

Estudo do ponto $(x, y) = (-2, -2)$. Como

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

segue-se que é um ponto de sela para f .

3. Considere o sistema

$$\begin{cases} xz^3 + y^2u^3 = 1 \\ 2xy^3 + u^2z = 0 \end{cases}$$

a) Mostre que este sistema define x e y como funções implícitas diferenciáveis de z e u , $x = x(z, u)$ e $y = y(z, u)$, numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0, 1, 0, 1)$.

R: Consideramos $F(x, y, z, u) = (xz^3 + y^2u^3 - 1, 2xy^3 + u^2z) \in C^1(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^2)$. Temos que $F(0, 1, 0, 1) = (0, 0)$ e além disso

$$\det \left[\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} \right] (0, 1, 0, 1) \neq 0,$$

onde $F_1(x, y, z, u) = xz^3 + y^2u^3 - 1$ e $F_2(x, y, z, u) = 2xy^3 + u^2z$. Pelo teorema da função implícita, podemos concluir então que este sistema define x e y como funções implícitas diferenciáveis de z e u , $x = x(z, u)$ e $y = y(z, u)$, numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0, 1, 0, 1)$.

b) Estude a invertibilidade da função $g(z, u) = (x(z, u), y(z, u))$ numa vizinhança de $(z_0, u_0) = (0, 1)$.

R:

Pelo teorema da função inversa bastará verificar que

$$\det Dg(0, 1) \neq 0. \tag{1}$$

Pode-se ver¹ que

$$Dg(0, 1) = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

pelo que (1) é satisfeito.

4. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(tx) = t^m f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $t > 0$ (homogeneidade de grau m). Assumindo que f é diferenciável, mostre que para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\nabla f(x) \cdot x = m f(x).$$

¹Semelhante à resolução do 1º Teste...

R: Se $f(tx) = t^m f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $t > 0$, então, derivando em ordem a t , obtemos que

$$\nabla f(tx) \cdot x = mt^{m-1} f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $t > 0$. Em particular se $t = 1$ obtemos que

$$\nabla f(x) \cdot x = m f(x)$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

5. Considere a variedade

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2, x < 4\}.$$

a) Determine o espaço normal a M no ponto $(2, 1, 1)$.

R:

$$[T_{(2,1,1)}M]^\perp = \langle \nabla F(2, 1, 1) \rangle^2$$

onde $F(x, y, z) = x - y^2 + z^2$. Isto é

$$[T_{(2,1,1)}M]^\perp = \langle (1, -2, -2) \rangle$$

b) Determine os possíveis extremos da função $f(x, y, z) = 3x + y^2 - 6z$ restrita a M .

R: Pelo teorema dos multiplicadores de Lagrange, uma condição necessária para que um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ seja um extremo de $f(x, y, z) = 3x + y^2 - 6z$ restrita a M é que exista $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla F(x, y, z) \\ F(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Pode-se ver que o sistema (2) é verificado se e só se $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ (com $\lambda = 3$). Assim, este o único possível ponto de extremo de $f|_M$.

c) Identifique o bordo de M e justifique que é uma variedade. Indique a sua dimensão.

R:

O bordo de M é o conjunto

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y^2 + z^2, x = 4\}.$$

Pode-se ver que é uma variedade-1 de \mathbb{R}^3 . Com efeito basta observar que

² $\langle v \rangle$ significa o espaço linear gerado por v ...

³Circunferência em \mathbb{R}^3 .

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, F(x, y, z) = (0, 0)\}$$

onde $F(x, y, z) = (x - y^2 - z^2, x - 4)$, e que além disso $F \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$ e

$$\text{Car}DF(x, y, z) = 2$$

para cada ponto $(x, y, z) \in C$.

d) Estude se o campo $F(x, y, z) = (e^x, y, z^2)$ é gradiente. Calcule o trabalho realizado por F ao longo do bordo de M percorrido no sentido horário quando visto do ponto $(10, 0, 0)$.

R: Pode-se ver (usando a definição) que F é um campo fechado em \mathbb{R}^3 . Como em \mathbb{R}^3 ambas as noções são equivalentes (por ser um domínio simplesmente conexo), segue-se que F é um campo gradiente em \mathbb{R}^3 . Assim o trabalho ao longo de C realizado por F é nulo (independentemente da orientação de C) dado que C é uma curva fechada.

e) Usando o teorema de Stokes calcule o trabalho realizado pelo campo

$$G(x, y, z) = (-2yz, 0, 0)$$

ao longo do bordo de M percorrido no sentido anti-horário quando visto do ponto $(10, 0, 0)$.

R:

Seja

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < x, x = 4\}$$

(tem o mesmo bordo que M). Usando o teorema de Stokes

$$\int_C F \cdot dg = \text{Fluxo}_N(\text{rot}(G)) = \int \int_N (0, -2y, 2z) \cdot (1, 0, 0) dS = 0.$$

Nota: Também pode ser feito usando a variedade M !

6. Calcule o volume do sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, -2 < z < 2\}.$$

R: Usando coordenadas cilíndricas

$$\text{Vol}(V) = \int_0^{2\pi} \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \rho \, d\rho \, dz \, d\theta$$

7. Calcule o fluxo de $F(x, y, z) = (x + \cos(e^{z+y}), y^2, -(2y+1)z)$ ao longo da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, -2 < z < 2\}.$$

orientada com normal n tal que $n_z > 0$ nos pontos com coordenada z positiva ($\text{Fluxo}_S(F)$).

R: Como $\text{div}(F) = 0$, então do teorema da divergência aplicado a

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 < 9, -2 < z < 2\},$$

vem (dado que $\partial D = S \cup S_1 \cup S_2$) que

$$\int \int_S F \cdot n^e dS + \int \int_{S_1} F \cdot n^e dS + \int \int_{S_2} F \cdot n^e dS = 0$$

onde

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 < 5, z = 2\}$$

e

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 < 5, z = -2\}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \text{Fluxo}_S(F) &= - \int \int_{S_1} F \cdot n^e dS - \int \int_{S_2} F \cdot n^e dS \\ &= - \int \int_{S_1} (x + \cos(e^{z+y}), y^2, -(2y+1)z) \cdot (0, 0, 1) dS \\ &\quad - \int \int_{S_2} (x + \cos(e^{z+y}), y^2, -(2y+1)z) \cdot (0, 0, -1) dS \\ &= \int \int_{S_1} 2(2y+1)z dS - \int \int_{S_2} 2(2y+1)z dS. \end{aligned}$$

Considerando $g_1(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 2)$, $g_2(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, -2)$, $r \in [0, \sqrt{5}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, parametrizações de S_1 e S_2 respectivamente, obtemos que

$$\begin{aligned} \int \int_{S_1} 2(2y+1)z dS &= \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} 4(2r \sin \theta + 1)r d\theta dr \\ \int \int_{S_2} 2(2y+1)z dS &= - \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} 4(2r \sin \theta + 1)r d\theta dr \end{aligned}$$

donde

$$\text{Fluxo}_S(F) = 8 \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} (2r \sin \theta + 1)r d\theta dr$$

8. Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e D um domínio regular, $D \subset U$. Para cada $u : U \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^2$ definimos o Laplaciano de u por

$$\Delta u = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right].$$

- a) Mostre que $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$ para todo o ponto $(x, y, z) \in U$.

R: Por definição

$$\operatorname{div}(\nabla u)(x, y, z) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] (x, y, z) = \Delta u(x, y, z)$$

- b) Mostre que não pode existir nenhuma função $u \in C^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } D \\ \nabla u \cdot n = 1 & \text{em } \partial D, \end{cases}$$

onde n é a normal unitária à ∂D exterior em relação a D .

R: Se existisse uma tal função, aplicando o teorema da divergência chegaríamos a que

$$\int \int \int_D \operatorname{div}(\nabla u) dx dy dz = \int \int_{\partial D} \nabla u \cdot n dS$$

o que é uma contradição pois levaria a que $0 = 1!!!$