APOIO À FICHA 9

MARGARIDA BAÍA, DM, IST

Exemplos resolvidos semelhantes aos da Ficha 9.

(1) Considere os seguintes conjuntos

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2, y = 2\}.$$

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2,\ x < 4\}.$$

(a) Justifique que C e N são variedades diferénciaveis em $\mathbb{R}^3$ e indique a sua dimensão.

R:

C? [1]

Uma resolução possível:

Usamos a caracterização de uma variedade diferenciável como (localmente) um conjunto de nível. Neste caso temos que

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ F(x, y, z) = (0, 0)\}$$

com $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x - y^2 - z^2, y - 2)$ (i.e C é de facto globalmente um conjunto de nível). Basta agora ver que F verifica as propriedades da caracterização dada na aula:

- Claramente $F \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$ (cada componente de F é um polinómio logo $F \in C^1$).
- Além disso: Car$DF(x, y, z) = 2$ para cada ponto $(x, y, z) \in C$?

Temos que

$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

As duas primeiras colunas desta matriz são claramente independentes para cada ponto $(x, y, z) \in C$ porque

$$\begin{vmatrix} 1 & -2y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

logo Car$DF(x, y, z) = 2$ para cada ponto $(x, y, z) \in C$.

Concluimos que C é uma variedade-1 em $\mathbb{R}^3$.

[1] Reparem que C é uma parábola: veremos que é uma variedade-1

Observação: outra forma de justificar que a Car$DF(x,y,z) = 2$ para cada ponto $(x,y,z) \in C$ é reparar que as duas linhas desta matriz são linearmente independentes (Recordem: a característica de uma matriz é o número das suas linhas ou colunas lineramente independentes).

Outra resolução possível:
Usamos a caracterização de uma variedade diferenciável como (localmente) um gráfico. Temos que:

$$C = \{(4+z^2, 2, z),\ z \in \mathbb{R}\}$$

i.e C é (globalmente) o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(z) = (4+z^2, 2)$$

Claramente $f \in C^1$ logo podemos concluir que C é uma variedade-1 em $\mathbb{R}^3$.
N? [2]

Uma resolução possível:
Usem a caracterização de uma variedade diferenciável como (localmente) um conjunto de nível. Reparem que agora

$$N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ F(x,y,z) = 0\}$$

com $F : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x < 4\} \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = x - y^2 - z^2$
Acabem o exercício de forma semelhante ao feito anteriormente (agora deverão concluir que N é uma variedade-2 em $\mathbb{R}^3$)...

Outra resolução possível:
Usem a caracterização de uma variedade diferenciável como (localmente) um gráfico. Temos que:

$$N = \{(y^2+z^2, y, z),\ (y,z) \in D\},\ D = \{(y,z) :\ y^2+z^2 < 4\},$$

i.e N é (globalmente) o gráfico da função $f : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(y,z) = y^2 + z^2.$$

Acabem o exercício de forma semelhante ao feito anteriormente...

(b) Determine o espaço normal a N no ponto $(2,1,1)$.
R:

$$\left[T_{(2,1,1)}N\right]^{\perp} = \mathcal{L}\{\nabla F(2,1,1)\}$$

onde $F(x,y,z) = x - y^2 + z^2$. Isto é

$$\left[T_{(2,1,1)}N\right]^{\perp} = \mathcal{L}\{(1,-2,-2)\}.$$

(c) Determine a equação da recta normal a N no ponto $(2,1,1)$.
R:

$$(x,y,z) = (2,1,1) + \lambda(1,-2,-2),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

[2] Reparem que N é um pedaço de paraboloide: veremos que é uma variedade-2

(d) Determine equação do plano tangente a N no ponto $(2,1,1)$.
R:

$$[(x,y,z)-(2,1,1)].(1,-2,-2)=0$$

(e) Determine um vector tangente a C no ponto $(5,2,1)$.
R:
Uma resolução possível:

$$\left[T_{(5,2,1)}N\right]^{\perp}=\mathcal{L}\{\nabla F_1(5,2,1),\nabla F_2(5,2,1)\}$$

onde $F=(F_1,F_2)$ é dada por $F(x,y,z)=(x-y^2-z^2,y-2)$. Isto é

$$\left[T_{(5,2,1)}N\right]^{\perp}=\mathcal{L}\{(1,-4,-2),(0,1,0)\}$$

Um vector do espaço tangente será por exemplo: $v=(2,0,1)$ (reparem que é perpendicular a cada um dos vectores da base do espaço normal).
Nota: se pedissem o espaço tangente a N no ponto $(2,1,1)$, neste caso em que o espaço terá dimensão um, será apenas o espaço linear gerado por este vector.

Uma outra resolução possível:
Claramente (usando a segunda resolução acima) a função

$$g(z)=(4+z^2,2,z),z\in\mathbb{R}$$

é uma parametrização de C (pensar porquê!). Assim um vector do espaço tangente a C em $(5,2,1)=g(1)$ é $v=Dg(1)=(2,0,1)$.
Nota: de facto

$$\left[T_{(5,2,1)}C\right]^{\perp}=\mathcal{L}\{Dg(1)\}=\mathcal{L}\{(2,0,1)\}.$$

(2) Justifique se os conjuntos

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ x^2=y^2\},$$

$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ y=|x|\},$$

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ x^2=y^2,\ x>0,\ y>0\},$$

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ x^3=y^3\},$$

são uma variedade-1 em $\mathbb{R}^2$.

R: C e D são variedades diferenciáveis de dimensão um em $\mathbb{R}^2$ (explicar!). Por sua vez, A e B não são uma variedade diferenciável em $\mathbb{R}^2$ (explicar!) **Sugestão**: ver que numa vizinhança de $(0,0)$ os conjuntos A e B não são o gráfico de nenhuma função C^1 de uma variável.

Bom estudo!