

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 8

(Função Inversa. Função Implícita)

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (xy, \frac{y}{x})$.
 - a) Mostre que f não é injectiva.
 - b) Determine um subconjunto de \mathbb{R}^2 em que f é injectiva.
 - c) Mostre que f tem inversa local em torno do ponto $(2, 2)$.
 - d) Calcule $Df^{-1}(4, 1)$, em que f^{-1} designa uma das funções inversas de f .
2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} u &= x + y + \operatorname{sen}(x - y) \\ v &= 1 + \log(1 + xy) - x. \end{cases}$$

Mostre que existe uma vizinhança de $(u, v) = (2, \log 2)$ e uma vizinhança de $(x, y) = (1, 1)$ em que o sistema define (x, y) como função, de classe C^1 , de (u, v) e calcule $\frac{\partial y}{\partial v}(2, \log 2)$.

3. Mostre que a equação $y \operatorname{sen}(x + y) = 0$ define, implicitamente, x como função de y em alguma vizinhança do ponto $(0, \pi)$ e calcule a derivada $\frac{dx}{dy}(\pi)$. Confirme o resultado explicitando x como função de y .
4. Mostre que a equação $2z + x^2 z^5 + y^2 x^3 + xy = 2$ define implicitamente z como função de x e de y , em torno do ponto $(0, 0, 1)$. Calcule a derivada $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0, 0)$.
5. Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ definido pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 + 1 \\ y^2 + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} z = 1. \end{cases}$$

- a) Mostre que numa vizinhança do ponto $(0, 1, 0)$, o conjunto S é o gráfico de uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, em que I é um intervalo aberto em \mathbb{R} , ou seja, duas das variáveis são funções da terceira.
 - b) Calcule $f'(0)$.
6. Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e suponhamos que a equação $F(x, y, z) = 0$ determina cada uma das variáveis como função, de classe C^1 , das restantes.

Assumindo que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0,$$

mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \right) \left(\frac{\partial x}{\partial y}(y, z) \right) \left(\frac{\partial y}{\partial z}(x, y) \right) = -1$$