

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de preparação

1. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2ye^{y-1} = t \\ x^2 + y^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 1. \end{cases}$$

a) Mostre que este sistema define, numa vizinhança do ponto $(t_0, x_0, y_0) = (2, 1, 1)$, as variáveis x e y como funções de t , de classe C^1 .

b) Calcule $x'(2)$ e $y'(2)$.

2. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 ; x = y ; z > 0\}.$$

a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

b) Determine um vector normal a M no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

3. Determine o valor mínimo da função $f(x, y, z) = xy + z^2$ no conjunto definido por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = x. \end{cases}$$

4. Calcule o trabalho do campo vectorial

$$F(x, y) = \left(-\frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} - y^3, \frac{2x+2}{(x+1)^2 + y^2} + x^3 + y \right),$$

ao longo da circunferência de raio igual a dois e centro na origem de \mathbb{R}^2 e no sentido positivo.

5. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + x^2 = y^2 + z^2 ; 0 < x < 2\}.$$

orientada com a normal ν que no ponto $(1, 0, \sqrt{2})$ tem terceira componente positiva.

a) Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, -z)$ através de S no sentido da normal ν , usando o teorema da divergência.

b) Calcule o fluxo do campo vectorial $G(x, y, z) = (-x, -y, 2z)$ através de S no sentido da normal ν , usando o teorema de Stokes.

c) Calcule o fluxo do rotacional do campo $H(x, y, z) = (-y, x, z)$ através de S no sentido da normal ν .

6. Demonstre o teorema da função inversa usando o teorema da função implícita.