

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação/Exame (versão 2) - 28 de Janeiro de 2013

Duração: 1h30(Teste), 3h00(Exame)

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

(1.5 val.) 1. Considere a função

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}.$$

Calcule, ou mostre que não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

(1.5 val.) 2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $g(0, 1) = -1$ e $Dg(0, 1) = [2 \ 3]$ e seja $f(t) = (t^3, t^2)$. Determine $D(f \circ g)(0, 1)$.

(2 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = e^{x^2} + y(z - 3)$.

(1 val.) 4. Seja $g(x, y) = \frac{2y}{x}e^{y/x}$ e

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 1 < \frac{y}{x} < 2, 1 < xy < 3\}.$$

Calcule $\int_A g$, utilizando uma mudança de variáveis apropriada.

5. Seja $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 2, x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$.

(1 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de A na forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(1.5 val.) b) Calcule o volume de A .

(1.5 val.) 6. Mostre que uma função vectorial é diferenciável se e só se cada uma das suas funções coordenadas for diferenciável.

Teste 2

7. Considere o conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, x + z = 1\}$.

- (1 val.) a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.
(1 val.) b) Determine o espaço normal a M no ponto $(0, 0, 1)$.
(1 val.) c) Determine os extremos da função $f(x, y, z) = y$ no conjunto M .

(1.5 val.) 8. Mostre que a equação

$$x + \log(x^2 + y^2 + z^2 + z) = 1$$

define a variável x como função das variáveis y e z em alguma vizinhança do ponto $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ e calcule $\frac{\partial x}{\partial y}(0, 0)$ e $\frac{\partial x}{\partial z}(0, 0)$.

9. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2, x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

- (0.5 val.) a) Parametrize a superfície S .
(1 val.) b) Calcule a área de S .
(1 val.) c) Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = (y, -x, z + 3)$ e calcule o trabalho

$$\int_{\partial S} F \cdot dg$$

no sentido horário quando visto do ponto $(0, 0, 10)$, usando o Teorema de Stokes.

(1.5 val.) d) Determine o fluxo de

$$G(x, y, z) = (x, -y^5 - y, 5y^4z + 3)$$

através de S no sentido da normal com terceira componente positiva, usando o Teorema da Divergência.

(1.5 val.) 10. Demonstre o Teorema da Função Implícita usando o Teorema da Função Inversa.