Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II
Exame 1/Teste 2 - 21.Jun.2010 - 13h
(Apresente e justifique todos os cálculos)

1. Considere a função

$$f(x,y) = \frac{xy^2 - y^2}{(x-1)^2 + y^2},$$

definida em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$.

(1 val.) a) Diga, justificando, se f tem limite no ponto $(1,0)$.

(1 val.) b) Calcule a derivada de f segundo o vector $(2,0)$ no ponto $(1,1)$.

(1 val.) c) Seja $g : D \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(x,y) = (e^{-2f(x,y)} + y - 1\,,\; f(x,y) + 1).$$

Justifique que $f \circ g$ é diferenciável no ponto $(1,1)$ e calcule $D(f \circ g)(1,1)$.

Resolução:

(a)

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y^2}{x^2+y^2}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} = 0$$

pois $|\frac{y^2}{x^2+y^2}| \leq 1$ e $x \to 0$.

(b) Como a função f é de classe C^1 no seu domínio temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = Df(1,1)\,\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{y^2((x-1)^2+y^2) - 2(x-1)^2y^2}{((x-1)^2+y^2)^2}_{|(1,1)} = \frac{y^2(y^2-(x-1)^2)}{((x-1)^2+y^2)^2}_{|(1,1)} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{2(x-1)y((x-1)^2+y^2) - 2(x-1)y^3}{((x-1)^2+y^2)^2}_{|(1,1)} = \frac{2(x-1)^3y}{((x-1)^2+y^2)^2}_{|(1,1)} = 0.$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2.$$

(c) A função f é diferenciável no ponto $g(1,1) = (1,1)$ uma vez que é o quociente de polinómios e o denominador não se anula. Por outro lado, a função g é diferenciável no ponto $(1,1)$ por ser a composição de funções diferenciáveis. Logo, $f \circ g$ é diferenciável no ponto $(1,1)$ e, pela regra de derivação da função composta, temos

$$D(f \circ g)(1,1) = Df(g(1,1))Dg(1,1).$$

Como $f(1,1) = 0$ temos $g(1,1) = (1,1)$. Além disso,

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\frac{\partial f}{\partial x}\, e^{-2f(x,y)} & -2\frac{\partial f}{\partial y}\, e^{-2f(x,y)} + 1 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix},$$

pelo que

$$Dg(1,1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$D(f \circ g)(1,1) = Df(1,1)Dg(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1 val.) 2. Mostre que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $F(x,y) = (\cos(x) - y^2, x + \operatorname{sen}(\pi y))$, admite uma função inversa F^{-1} de classe C^1 numa vizinhança do ponto $(\pi, 1)$. Calcule $DF^{-1}(-2,\pi)$.

Resolução: Como F é de classe C^1 e

$$DF(x,y) = \begin{bmatrix} -\sin x & -2y \\ 1 & \pi \cos \pi y \end{bmatrix}$$

temos

$$\det DF(\pi,1) = \det \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -\pi \end{bmatrix} = 2 \neq 0,$$

pelo que o teorema da função inversa garante a existência de inversa F^{-1} numa vizinhança do ponto $(\pi,1)$. Além disso, como $F(\pi,1) = (-2,\pi)$, temos

$$DF^{-1}(-2,\pi) = (DF(\pi,1))^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

(1,5 val.) 3. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $g(x,y) = 3x^2 - 3xy + y^3$. Determine os pontos de máximo ou mínimo local de g.

Resolução: Os pontos de estacionaridade são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 3y = 0 \\ \\ -3x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \\ y^2 = x. \end{cases}$$

Este sistema tem por soluções os pontos $(x,y) = (0,0)$ e $(1/4, 1/2)$. A matriz Hessiana de g é

$$H(f)(x,y) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$$

e portanto

$$H(f)(0,0) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

donde se vê que $(0,0)$ é um ponto de sela $(\det H(f)(0,0) = -9 < 0)$. Além disso,

$$H(f)(1/4,1/2) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

pelo que $(1/4, 1/2)$ é um ponto de mínimo, uma vez que

$$\det H(f)(1/4,1/2) = 9 > 0 \quad \text{e} \quad \text{tr} H(f)(1/4,1/2) = 9 > 0.$$

4. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = xy^3 + 2y + x^2 z$.

(1 val.) a) Mostre que a equação $F(x,y,z) = 0$ determina y como função de x e z, de classe C^1, ou seja, $y = g(x,z)$, numa vizinhança do ponto $(-1,-1,1)$, e calcule $Dg(-1,1)$.

(1 val.) b) Mostre que o conjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$ é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(1 val.) c) Determine uma base para o espaço tangente a S em $(-1,-1,1)$.

Resolução:

(a) Como F é de classe C^1, $F(-1,-1,1) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(-1,-1,1) = 3xy^2 + 2_{|(-1,-1,1)} = -1 \neq 0$ temos, pelo teorema da função implícita, que a equação $F(x,y,z) = 0$ determina y como função $y = g(x,z)$ numa vizinhança do ponto $(-1,-1,1)$. Além disso,

$$\begin{aligned} Dg(-1,-1) &= -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(-1,-1,1)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial(x,z)}(-1,-1,1) \\ &= 1 \cdot \begin{bmatrix} y^3 + 2xz & x^2 \end{bmatrix}_{|(-1,-1,1)} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Como

$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} y^3+2xz & 3xy^2+2 & x^2 \end{bmatrix}$$

tem característica 1 em todos os pontos de S (o vector $(y^3+2xz, 3xy^2+2, x^2)$ nunca se anula pois, se $x=0$, temos $DF(0,y,z) = \begin{bmatrix} y^3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$), conclui-se que o conjunto de nível,

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\},$$

da função F (de classe C^1) é uma variedade diferenciável de dimensão 2 em R^3.

(c) Considerando a função F da alínea anterior temos que espaço normal de S no ponto $(-1,-1,1)$ é gerado pelo vector $\nabla F = (y^3+2xz, 3xy^2+2, x^2)$ nesse ponto. Assim,

$$T_{(-1,-1,1)}S^{\perp} = \{a(-3,-1,1) \in \mathbb{R}^3 : \, a \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\left\{(-3,-1,1)\right\}.$$

O espaço tangente nesse ponto é o complemento ortogonal do espaço anterior e portanto é definido pela equação $(-3,-1,1)\cdot(a,b,c) = 0 \Leftrightarrow c = 3a+b$, ou seja,

$$T_{(-1,-1,1)}S = \{(a,b,3a+b) \in \mathbb{R}^3 : \, a,b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\left\{(1,0,3),(0,1,1)\right\}.$$

(1,5 val.) 5. Considere a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dê um exemplo de uma função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ diferenciável em $(0,0,0)$, com $g(0,0,0) = (0,0)$ e $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0,0) = (1,0)$ tal que $f \circ g$ seja diferenciável em $(0,0,0)$ ou mostre que uma tal função não pode existir.

Resolução: Se tal função existisse teríamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f\circ g)}{\partial x}(0,0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f\circ g)(h,0,0) - (f\circ g)(0,0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(h,0,0)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(h,0,0))}{h} \end{aligned}$$

pois $g(0,0,0) = (0,0)$ e $f(0,0) = 0$. Como g não é constante numa vizinhança de $(0,0)$ temos

$$f(g(h,0,0)) = \frac{g_1(h,0,0)}{\sqrt{g_1^2(h,0,0) + g_2^2(h,0,0)}}$$

e então

$$\frac{\partial (f\circ g)}{\partial x}(0,0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(h,0,0))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g_1(h,0,0)}{h\sqrt{g_1^2(h,0,0) + g_2^2(h,0,0)}}.$$

Por outro lado, como

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

temos $\frac{\partial g_1}{\partial x} = 1$ e então

$$1 = \lim_{h \to 0} \frac{g_1(h,0,0) - g_1(0,0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g_1(h,0,0)}{h}.$$

Como g é contínua temos

$$\lim_{h \to 0} ||g(h,0,0)||^2 = ||g(0,0,0)||^2 = 0$$

e então

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x}(0,0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{g_1(h,0,0)}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{g_1^2(h,0,0) + g_2^2(h,0,0)}} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Conclui-se assim que é impossível encontrar uma função g nas condições do enunciado de forma a que $f \circ g$ seja diferenciável em $(0,0,0)$.

Teste 2

(1,5 val.) 6. Determine os valores máximo e mínimo que a função $g(x,y,z) = x - y$ assume na variedade

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 0, \ x^2 + y^2 + z^2 = 2\}.$$

Resolução: Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 x \\ -1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 y \\ 0 = \lambda_1 + 2\lambda_2 z \\ x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2. \end{cases}$$

Somando as três primeiras equações e tendo em conta a quarta, teremos $\lambda_1 = 0$. A terceira equação passa a ser $\lambda_2 z = 0$.

O caso em que $\lambda_2 = 0$ não ocorre porque a primeira equação passaria a ser $1 = 0$.

Resta o caso em que $z = 0$ e, tendo em conta as duas últimas equações, obtemos

$$x + y = 0 \ ; \ x^2 = 1.$$

Portanto, os extremos da função contínua g na variedade compacta C serão os pontos $(-1,1,0)$ e $(1,-1,0)$. Sendo $g(-1,1,0) = -2$ e $g(1,-1,0) = 2$, o valor máximo é 2 e o valor mínimo é -2.

(2 val.) 7. Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \ ; \ y > 0 \ ; \ z > 0 \ ; \ x + y + z < 2 \ ; \ x + y < 1\}.$$

Escreva expressões para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$ e $\int(\int(\int dz)dy)dx$

Resolução: É claro que $0 < z < 2$. Sendo $x + y < 1$ e $x + y < 2 - z$, temos dois casos:

(a) $x + y < 1$ se $1 < 2 - z \Leftrightarrow 0 < z < 1$.

(b) $x + y < 2 - z$ se $1 < z < 2$.

Portanto,

$$\mathrm{vol}_3(V) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} dx \right) dy \right) dz + \int_1^2 \left(\int_0^{2-z} \left(\int_0^{2-z-y} dx \right) dy \right) dz.$$

Da definição de V, obtemos

$$0 < x < 1 \; ; \; 0 < y < 1 - x \; ; \; 0 < z < 2 - x - y$$

e, portanto

$$\mathrm{vol}_3(V) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{2-x-y} dz \right) dy \right) dx.$$

(1,5 val.) 8. Calcule o momento de inércia em torno do eixo Ox da superfície representada pelo conjunto

$$S = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 \; ; \; x^2 < 1 \; ; \; 0 < y < 1\}$$

e com densidade de massa $\sigma(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$.

Resolução: Da definição de S uma boa parametrização será

$$g(x, y) = (x, y, x^2) \; ; \quad -1 < x < 1 \; ; \; 0 < y < 1.$$

donde se conclui facilmente que

$$\sqrt{\det Dg^T Dg} = \sqrt{1 + 4x^2}.$$

Portanto, o momento de inércia será dado pelo integral

$$\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (y^2 + x^4) dx \right) dy = \frac{16}{15}.$$

(1,5 val.) 9. Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo $F(x, y, z) = (z, y, -x)$ ao longo da linha definida pelas equações $y = 1$; $x^2 + z^2 = 1$ e descrita, uma vez, no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0, 10, 0)$.

Resolução: A linha dada é o bordo do círculo

$$S = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1 \; ; \; x^2 + z^2 < 1\}$$

com orientação induzida pela normal $\nu = (0, 1, 0)$.

Pelo teorema de Stokes, o trabalho realizado pelo campo F é o fluxo do rotacional de F através de S segundo a normal ν e, sendo $\mathrm{rot}\, F = (0, 2, 0)$, será o integral,

$$\iint_S \mathrm{rot}\, F \cdot \nu = \iint_S 2 = 2\pi.$$

(2 val.) 10. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vectorial definido por $F(x,y,z) = (xf(z), -yf(z), z)$ em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1. Calcule o fluxo do campo F através da superfície

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2,\ 0 < z < 1\}$$

na direcção da normal com terceira componente positiva.

Resolução: Seja V o domínio definido por

$$V = \{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z < 2 - x^2 - y^2\ ;\ 0 < z < 1\}.$$

É claro que a fronteira de V é a união de três superfícies, ou seja,

$$\partial V = W \cup T_0 \cup T_1,$$

em que,

$$T_0 = \{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 2\ ;\ z = 0\}$$

e

$$T_1 = \{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\ ;\ z = 1\}.$$

Sendo $\operatorname{div} F = 1$, pelo teorema da divergência, temos

$$\mathrm{vol}_3(V) = \iint_W F \cdot \nu_{ext} + \iint_{T_0} F \cdot \nu_{ext} + \iint_{T_1} F \cdot \nu_{ext}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\iint_W F \cdot \nu_{ext} &= \mathrm{vol}_3(V) - \mathrm{vol}_2(T_1) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{2-z}} \rho d\rho \right) dz \right) d\theta - \pi \\
&= \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(1,5 val.) 11. Seja M a superfície que é imagem da função $g\colon [-1,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(t,\theta) = ((2 + t\cos\tfrac{\theta}{2})\cos\theta, (2 + t\cos\tfrac{\theta}{2})\operatorname{sen}\theta, t\operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2})$$

e $F\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\colon z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$ o campo vectorial definido pela expressão

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z \right).$$

Calcule $\operatorname{rot} F$ e o trabalho realizado por F ao longo de ∂M percorrido num sentido que parece o anti-horário quando visto do ponto $(0,0,10)$ e explique porque o resultado que obtém não contradiz o Teorema de Stokes.

Resolução: É fácil concluir que $\operatorname{rot} F = (0,0,0)$ (ou seja, F é um campo fechado).

É fácil identificar a superfície M usando coordenadas cilíndricas: a intersecção de M com o semi-plano (r,z) para um dado θ fixo é a linha parametrizada pelas equações

$$z = t \operatorname{sen} \tfrac{\theta}{2}, \qquad r = 2 + t \cos \tfrac{\theta}{2}, \qquad -1 \le t \le 1$$

que é o segmento de recta de com comprimento 2 centrado no ponto $(r,z) = (2,0)$ que faz um ângulo de $\frac{\theta}{2}$ com o eixo dos rr.

À medida que θ varia de 0 a 2π, o ângulo que o segmento de recta faz com o eixo dos rr varia de 0 a π e portanto M é uma banda de Möbius. Uma vez que M não é orientável (não existe uma normal unitária a M que varie continuamente) o Teorema de Stokes não é aplicável e portanto não se pode concluir do facto de ser $\operatorname{rot} F = 0$ que o trabalho realizado por F ao longo do bordo de M seja nulo.

O bordo de M é a imagem das extremidades dos segmentos de recta, isto é,

$$\partial M = g\left(\{-1,1\} \times [0,2\pi]\right).$$

Note-se que ∂M tem uma única componente que "dá duas voltas" em torno do eixo dos zz. De facto, a imagem por g de cada um dos intervalos $\{-1\} \times [0,2\pi]$ e $\{1\} \times [0,2\pi]$ não é uma linha fechada, mas $g(-1,2\pi) = g(1,0)$ e $g(-1,0) = g(1,2\pi)$ logo a união das duas imagens é uma linha fechada.

Pode calcular-se o trabalho de F ao longo de ∂M de várias formas. A que dá mais trabalho é simplesmente substituir na parametrização que se obtém fazendo $t = -1$ e $t = 1$ na expressão para g e aplicar a fórmula para o cálculo do integral de linha.

Alternativamente, uma vez que F é fechado e o caminho que percorre ∂M no sentido indicado é homotópico ao caminho

$$g(\theta) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0), \quad 0 \le \theta \le 4\pi$$

(o "equador" da banda de Möbius percorrido duas vezes no sentido anti-horário) temos

$$\int_{\partial M} F \cdot d\vec{r} = \int_0^{4\pi} F(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0) \cdot (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 0) d\theta = 4\pi.$$

Note-se que é fácil escrever uma expressão para a homotopia em questão usando a função g dada (essencialmente, a restrição de g a $0 \le t \le 1$ (respectivamente a $-1 \le t \le 0$) dá uma homotopia entre "metade do bordo" e o "equador" da banda de Möbius percorrido uma única vez).

FInalmente, o resultado anterior pode ainda ser obtido sem invocar a invariância do integral de campos fechados ao longo de caminhos homotópicos aplicando o Teorema de Stokes à superfície que se obtém "cortando a banda de Möbius ao longo do equador". Esta superfície é uma deformação de um cilindro e portanto orientável. Uma das componentes do bordo do "cilindro" é o bordo da banda de Möbius, enquanto que a segunda componente do bordo do cilindro é enrolada duas vezes ao longo do "equador" da banda de Möbius.