Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 9

(Variedades. Espaço Tangente. Espaço Normal)

1. Mostre que cada um dos conjuntos seguintes é uma variedade, determine a respectiva dimensão e descreva-o parametricamente:

   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1\}$.

   b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \tan x \, ; \, -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\}$.

   c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1 \, ; \, y > |x| \, ; \, |z| < 2\}$.

   d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < z = 1 - x^2 - y^2\}$.

   e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (\sqrt{x^2+y^2} - 4)^2 + z^2 = 1 \, ; \, z > 0\}$.

   f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \, ; \, z > \dfrac{1}{2}\}$.

   g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = z^2 + 1 \, ; \, |z| < 1\}$.

   h) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = z^2 + 1 \, ; \, y + z = 1\}$.

2. Considere o conjunto
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x = y, x > 0\}.$$

   a) Mostre que A é uma variedade e determine a sua dimensão.

   b) Determine um vector tangente a A no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

   c) Parametrize A.

3. Determine a recta tangente e o plano normal à linha definida por
$$\{(\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(\frac{t}{2})) \ ; \ -\pi < t < \pi\}$$
no ponto $(1,0,0)$.

4. Determine a recta normal e o plano tangente ao cone
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 3 - \sqrt{x^2+y^2}\,\}$$
no ponto $(3,4,-2)$.

5. Determine o espaço tangente e o espaço normal à variedade
$$L = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1 \, ; \, z = x^2 - y^2\right\},$$
no ponto $(1,0,1)$.

6. Determine o espaço tangente e o espaço normal à variedade
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 - y^2 \, ; \, x^2 + y^2 < 2\right\},$$
no ponto $(1,0,1)$.