

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 3

(Diferenciabilidade)

1. Calcule as derivadas parciais de cada uma das funções seguintes:

a) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

b) $g(x, y) = \log \sqrt{1 + xy}$

c) $h(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

2. Calcule as derivadas parciais na origem da função: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

3. Calcule a matriz Jacobiana de cada uma das funções seguintes:

a) $f(x, y) = \left(\frac{x}{y}, xy\right)$

b) $g(x, y, z) = (\sqrt{yz}, e^{xyz})$

c) $h(x, y, z) = (x^2, xz - y, z^4)$

d) $\phi(x, y, z) = x^2 - xyz + z^4$

e) $\gamma(t) = \left(t^2, e^{2t}, \frac{1}{t}\right)$

4. Calcule as derivadas de cada uma das funções seguintes no ponto P e segundo o vector \mathbf{v} indicados:

a) $f(x, y) = x^y$; $P = (1, 1)$; $\mathbf{v} = (1, 2)$

b) $g(x, y, z) = e^x + yz$; $P = (1, 1, 1)$; $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$

5. Determine um vector segundo o qual a derivada da função $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, no ponto $(1, 1)$ é nula.

6. Considere as funções:

i) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

ii) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

iii) $g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Qual destas funções é diferenciável na origem? Justifique.

7. Considere a função: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a) Calcule a derivada de f no ponto $(1, 0)$ segundo o vector $(1, 2)$.

b) Calcule a derivada de f no ponto $(0, 0)$ segundo o vector $(1, 1)$.