Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 13

(Teorema da Divergência. Teorema de Stokes)

1. Sendo $F(x,y,z) = (-y^2 e^{x+z}, -z, y)$, calcule o fluxo de $\nabla \times F$ através da superfície
$$S = \{(x,y,z) \colon x^2 + 2 = y^2 + z^2,\ x > 0,\ x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$$
no sentido da normal com primeira componente negativa.

2. Considere a superfície
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 3 - 3x^2 - 3z^2,\ y > 0\},$$
orientada com a normal unitária n tal que $n_y > 0$. Seja $F(x,y,z) = (0, y^2, -2yz)$. Calcule o fluxo $\int_S F \cdot n$:
   a) Pela definição.
   b) Pelo teorema da divergência.
   c) Pelo teorema de Stokes.

3. Considere a superfície
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2,\ x > 0,\ z > 0\},$$
orientada com a normal unitária n tal que $n_z > 0$. Seja $F(x,y,z) = (x, y-1, -2z+1)$. Calcule o fluxo $\int_S F \cdot n$:
   a) Pelo teorema da divergência.
   b) Pelo teorema de Stokes.

4. Usando o teorema de Stokes, calcule o trabalho realizado pelo campo $H(x,y,z) = (-y, x, 3)$, ao longo da elipse definida pelas equações $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{30} = 1$; $z = 0$ e orientada no sentido horário quando vista do ponto $(0,0,10)$.

5. Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo vectorial
$$F(x,y,z) = (y + \operatorname{sen} x, \cos y, z^3)$$
ao longo do caminho
$$g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t)\,; \quad t \in [0, 2\pi].$$

6. Considere a superfície
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 = 1,\ z > 0\},$$
orientada com a normal unitária n tal que $n_z > 0$. Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $G(x,y,z) = (0,0,2)$ através de M no sentido de n.

7. Considere o campo vectorial
$$H(x,y,z) = \left(\frac{-2y}{(x-1)^2 + y^2} + yz, \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} + xz, xy \right).$$
   a) Calcule o trabalho de H ao longo da elipse definida por $2(x-1)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, percorrida no sentido anti-horário para um observador colocado no ponto $(1,0,1)$.
   b) Calcule o trabalho de H ao longo da circunferência definida por $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, $z = 0$.
   c) Será H um gradiente no seu domínio?