Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 11

(Trabalho. Campos Gradientes. Potenciais)

1. Considere o campo vectorial $f(x, y) = (-y, x)$.

   a) Calcule o trabalho realizado pelo campo f ao longo da elipse de equação $x^2 + 4y^2 = 1$, orientada no sentido anti-horário.

   b) Calcule o trabalho realizado por f ao longo da linha que limita o quarto de círculo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$, percorrida no sentido horário.

   c) Represente geometricamente o campo f e, sem efectuar os cálculos, confirme o resultado da alínea anterior.

2. Calcule o trabalho do campo vectorial $f(x, y, z) = (-y, x, xy + z^2)$ ao longo do caminho dado por $g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t), t \in [0, 2\pi]$.

3. Calcule o trabalho do campo vectorial $h(x, y, z) = (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2)$ ao longo do caminho $g(t) = (t, t^2, t), t \in [-1, 1]$.

4. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial $f(x, y, z) = (y, z, x)$ ao longo das seguintes curvas:

   (a) O segmento de recta que une o ponto $(1, 0, 1)$ a $(2, 1, -3)$.

   (b) A intersecção das superfícies $x^2 + y^2 = 1$ e $z = xy$ num sentido que parece o anti-horário quando visto desde um ponto no eixo dos zz muito acima do plano xy.

   (c) A intersecção das superfícies definidas pelas equações $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ num sentido que parece o horário quando visto desde o ponto $(10, 10, 0)$.

5. Considere os campos vectoriais seguintes:

$$\begin{cases} f(x, y) &= (x - y, x - 2), \\ g(x, y) &= (3 + 2xy, x^2 - 3y^2). \end{cases}$$

   Determine se f e g são ou não conservativos. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

6. Considere os campos vectoriais seguintes:

$$\begin{cases} f(x, y, z) &= (e^x, e^y, e^z), \\ g(x, y, z) &= (e^{yz}, xze^{yz}, xye^{yz}), \\ h(x, y, z) &= (\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, z). \end{cases}$$

   a) Determine se f, g e h são ou não conservativos. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

   b) Calcule o trabalho de f, g e h ao longo da curva definida pelas equações $y = x^3$, $z = 0$, percorrida desde o ponto $(0, 0, 0)$ até ao ponto $(1, 1, 0)$.

7. Determine se o campo $f(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$ é ou não conservativo. Calcule o trabalho realizado pelo campo f ao longo da elipse definida por $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{20} = 1$, percorrida no sentido anti-horário.