

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 10

(Extremos condicionados. Integrais de Campos Escalares em Variedades)

- Para cada um dos casos seguintes, determine os extremos da função f no conjunto S :
 - $f(x, y, z) = x + y + z$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2; x + z = 1\}$.
 - $f(x, y, z) = xyz$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
- Use o Método dos Multiplicadores de Lagrange para determinar os pontos de máximo da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ no disco de raio 1 e centro na origem de \mathbb{R}^2 .
- Determine os extremos absolutos da função $f(x, y, z) = x + y - z$ que se encontram na bola $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
- As faces de uma caixa rectangular sem tampa têm área total igual a 16 m^2 . Determine as dimensões da caixa que maximizam o respectivo volume.
- Determine os extremos da função $f(x, y, z) = x + y + z$ na superfície definida por $xyz = 1$.
- Determine os pontos da linha definida por $(\cos t, \sin t, \sin(\frac{t}{2}))$; $t \in \mathbb{R}$, mais afastados da origem.
- Calcule o comprimento do arco de hélice descrito pelo caminho

$$\alpha(t) = (t, \cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

- Determine a massa total do fio descrito por

$$\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

com densidade de massa por unidade de comprimento $\sigma(x, y, z) = z$.

- Considere o fio descrito pelas equações

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad z = y,$$

com densidade de massa por unidade de comprimento $\sigma(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Determine a massa total e as coordenadas do respectivo centro de massa.

- Considere a variedade-1 definida por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, 2x + 2y + z = -1\},$$

e com densidade de carga eléctrica por unidade de comprimento dada por

$$\alpha(x, y, z) = \sqrt{5 - 8(x+1)(y+1)}.$$

Calcule a carga eléctrica total de C .

- Considere a variedade-2

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = (x^2 + y^2)^2, x^2 + y^2 < 1\},$$

com densidade de massa dada por $\sigma(x, y, z) = \sqrt{1 + 16(x^2 + y^2)^3}$. Calcule a massa total de S .

- Calcule a área da superfície

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{3}|y| < |x|, z > 0\}.$$

13. Considere a superfície

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy, 1 < x < 2, 1 < y < 2\},$$

com densidade de massa dada por $\alpha(x, y, z) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2+y^2}}$. Calcule o momento de inércia de B relativamente ao eixo Ox .

14. Calcule as coordenadas do centróide do hemisfério

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}, \quad a > 0.$$