Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral - II

TESTE 2 - VERSÃO B

4 de Junho de 2011 - das 9h30m às 11h

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 + x^2 + y^2 \leq z \leq 2; 0 \leq x \leq y\right\}.$$

[3 val.] (a) Escreva uma expressão para o volume de D como integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dz\right) dy\right) dx$.

[3 val.] (b) Calcule a massa do sólido descrito por D, com densidade de massa dada por $\sigma(x, y, z) = z$.

[3 val.] 2. Considere o campo vectorial $F(x, y) = (2y + x^5, 3x + y^3) + \nabla\varphi(x, y)$ onde $\varphi(x, y) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x y}{2}\right)$. Calcule o trabalho de F ao longo da fronteira do quadrado $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leq 2; |y| \leq 2\}$ percorrida no sentido horário.

3. Sejam $F(x, y, z) = (x, y, z + 1)$,

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2};\ x > 0;\ z > 0\right\}$$

e seja $n = (n_1, n_2, n_3)$ a normal a S, unitária, tal que $n_3 > 0$.

[2 val.] (a) Calcule a área de S.

[3 val.] (b) Calcule o fluxo $\iint_S F \cdot n$ pela definição.

[3 val.] (c) Calcule o fluxo $\iint_S F \cdot n$ usando o Teorema da Divergência.

[3 val.] 4. Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um domínio regular e $g \colon U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Considere a superfície $T \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = g(x, y); (x, y) \in U\right\}.$$

Prove o Teorema de Stokes para a superfície T e para um campo vectorial de classe C^1, G, da forma $G = (G_1, G_2, 0)$.

Sugestão: Use o Teorema de Green.