Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste - 9 de Junho de 2007
(Todos os cursos execepto LEB, LEBM, LEFT, LEMAT, LEQ, LMAC, LQ)
Duração: 1h30m
Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o sólido

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1\,;\, 0 < z < 1+y\},$$

cuja densidade de massa é constante e igual a um.

(2 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

Resolução:

$$\mathrm{vol}(S) = \int_0^2 \left(\int_{z-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \right) dy \right) dz.$$

(2 val.) b) Calcule, em coordenadas cilíndricas, o momento de inércia de S relativo ao eixo Oz.

Resolução:

$$I_{zz}(S) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1+\rho \operatorname{sen}\theta} \rho^3 dz \right) d\rho \right) d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

(3 val.) 2. Calcule o trabalho realizado pelo campo

$$F(x,y,z) = \left(x + \frac{3y}{(x+1)^2+y^2}\,,\, y - \frac{3(x+1)}{(x+1)^2+y^2}\,,\, z^2 \right),$$

ao longo da elipse definida por $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+1)^2 + 2y^2 = 1\,;\, z = 0\}$ e percorrida uma vez no sentido horário quando vista do ponto $(0,0,10)$.

Resolução:

$$F(x,y,z) = -3G(x,y,z) + H(x,y,z)$$

em que

$$G(x,y,z) = \left(-\frac{y}{(x+1)^2+y^2}\,,\, \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}\,,\, 0 \right) \quad ; \quad H(x,y,z) = (x,y,z^2)$$

O campo H é gradiente e, portanto, o respectivo trabalho na elipse é nulo.

O campo G é fechado mas não é gradiente. A elipse é homotópica à circunferência definida por $(x+1)^2+y^2 = 1\,;\, z=0$. O trabalho de G nesta circunferência, percorrida no sentido horário quando vista do ponto $(0,0,10)$, é igual a -2π.

Portanto, o trabalho de F é igual a 6π.

(2 val.) 3. Calcule o trabalho realizado pelo campo

$$F(x,y) = (\operatorname{sen}(x^2) - y^3\,,\, x^3 + y^2),$$

ao longo da circunferência definida por $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ e percorrida uma vez no sentido anti-horário.

Resolução: Pelo teorema de Green, o trabalho de F é dado pelo integral

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 3r^3 dr \right) d\theta = \frac{3}{2}\pi.$$

4. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2\,;\, 1 < y < 4\},$$

orientada com a normal n cuja segunda componente é positiva.

(2 val.) a) Sabendo que S tem densidade de massa dada por $\alpha(x,y,z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + z^2)}$, calcule a massa total de S.

Resolução: Considerando a parametrização

$$g(\rho,\theta) = (\rho \operatorname{sen}\theta, \rho^2, \rho\cos\theta)\ ;\ 0 < \theta < 2\pi\ ;\ 1 < \rho < 2,$$

a massa de S é dada pelo integral

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 \alpha(g(\rho,\theta)) \|D_1 g \times D_2 g\| d\rho d\theta = 2\pi \int_1^2 \rho(1 + 4\rho^2) d\rho = 33\pi.$$

(3 val.) b) Calcule o fluxo do campo vectorial $f(x,y,z) = (2x, -y, -z)$ através de S no sentido da normal n.

Resolução: Sendo div$f = 0$ e aplicando o teorema de Gauss ao sólido definido por $x^2 + z^2 < y\ ;\ 1 < y < 4$, temos

$$\int\int_S f \cdot \nu_S + \int\int_{T_1} f \cdot \nu_{T_1} + \int\int_{T_2} f \cdot \nu_{T_2} = 0,$$

em que T_1 é a superfície dada por $y = 1\ ;\ x^2 + z^2 < 1$ e T_2 é a superfície dada por $y = 4\ ;\ x^2 + z^2 < 4$.
Dado que

$$f \cdot \nu_{T_1} = (2x, -1, z) \cdot (0, -1, 0) = 1\ \ ;\ \ f \cdot \nu_{T_2} = (2x, -4, z) \cdot (0, 1, 0) = -4,$$

obtemos

$$\int\int_S f \cdot \nu_S = 15\pi.$$

Sendo $\nu_S = -n$ a normal exterior ao sólido em S concluímos que

$$\int\int_S f \cdot n = -15\pi.$$

(3 val.) c) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial

$$F(x, y, z) = (2xy, -2y^2, 2yz)$$

através de S, no sentido da normal n.

Resolução: O potencial vectorial de F é o campo

$$A(x, y, z) = \int_0^1 F(tx, ty, tz) \times (tx, ty, tz)dt = (-y^2 z, 0, xy^2)$$

e, portanto,

$$\int\int_S F \cdot n = \int\int_S \text{rot} A \cdot n = \oint_{\Gamma_1} A \cdot d\gamma_1 + \oint_{\Gamma_2} A \cdot d\gamma_2$$

em que Γ_1 é a circunferência definida por $y = 1$; $x^2 + z^2 = 1$ e parametrizada por $\gamma_1(t) = (\cos t, 1, \operatorname{sen} t)$, e Γ_2 é a circunferência definida por $y = 4$; $x^2 + z^2 = 4$ e parametrizada por $\gamma_2(t) = (2\cos t, 4, -2\operatorname{sen} t)$.

Assim, temos

$$\int\int_S F \cdot n = 2\pi - 128\pi = -126\pi.$$

(3 val.) 5. Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e considere o campo vectorial $G(x, y, z) = \phi(r)(x, y, z)$, onde $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é de classe C^1. Sabendo que $\phi(1) = 1$ e $\operatorname{div} G = 0$, determine ϕ, *sem calcular* $\operatorname{div} G$ *directamente*.

Resolução: Estando G definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, consideremos o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < R.$$

Note-se que a fronteira de V é constituída por duas superfícies esféricas de raios 1 e R, respectivamente. As respectivas normais unitárias e exteriores a V são os vectores $-(x, y, z)$ e $\frac{1}{R}(x, y, z)$.

Sabendo que $\phi(1) = 1$ e $\operatorname{div} G = 0$, aplicando o teorema de Gauss em V, obtemos

$$0 = -4\pi\phi(1) + 4\pi R^3 \phi(R),$$

ou seja,

$$\phi(R) = \frac{1}{R^3}.$$