Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Soluções dos Mini-Testes
Vários Cursos - 1s-12-13

(Margarida Baía)

1) Calcule $D_{(2,1)}f(1,0)$ onde

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1ª Resolução: Como f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (por ser quociente de funções diferenciáveis cujo denominador não se anula), em particular é diferenciável em $(1,0)$ e temos que[1]

$$D_{(2,1)}f(1,0) = Df(1,0) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Dado que se $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^2+y^2) - xy^3(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2) - xy^3(y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

concluimos então que

$$Df(1,0) \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\right] = [0 \ 0]$$

e portanto, de (1), vem que

$$D_{(2,1)}f(1,0) = 0.$$

2ª Resolução: Em alternativa podia-se ter obtido esta derivada pela definição

$$D_{(2,1)}f(1,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f\big((1,0) + h(2,1)\big) - f(1,0)}{h} = 0.$$

2) Dadas as funções

$$f(x,y) = xy + x - y, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$g(u,v,w) = (uv + vw - 1, \frac{u}{v} + v - 2w - 2), \quad (u,v,w) \in \mathbb{R}^3, \ v \neq 0,$$

calcule (usando o teorema da derivada duma função composta)

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial v}(1,1,0)$$

[1]Caso a função não fosse diferenciável neste ponto, não poderiamos usar a fórmula (1).

Resolução: Do Teorema da Derivada Composta sabemos que $f \circ g$ é uma função diferenciável no seu domínio, sendo em particular diferenciável no ponto $(1, 1, 0)$. O teorema também nos permite calcular $D(f \circ g)(1, 1, 0)$ através das derivadas de f e g respectivamente, i.e, diz-nos que

$$D(f \circ g)(1, 1, 0) = Df(g(1, 1, 0)) \cdot Dg(1, 1, 0).$$

Como o exercício nos pede apenas a segunda entrada de $D(f \circ g)(1, 1, 0)$, bastará perceber que esta entrada é a multiplicação da primeira linha de $Df(g(1, 1, 0))$ pela segunda coluna de $Dg(1, 1, 0)$. Dito de outro modo, e usando a notação

$$x(u, v, w) = uv + vw - 1,\ y(u, v, w) = \frac{u}{v} + v - 2w - 2$$

para designar as componentes de g,

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial v}(1, 1, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(1, 1, 0)) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(1, 1, 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(1, 1, 0)) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(1, 1, 0) \tag{2}$$

Dado que

$$g(1, 1, 0) = (0, 0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}(u, v, w) = u + w \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial v}(1, 1, 0) = 1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial v}(u, v, w) = \frac{-u}{v^2} + 1 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial v}(1, 1, 0) = 0,$$

concluimos de (2) que[2]

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial v}(1, 1, 0) = 1.$$

[2]Nota: diagrama para recordar (2) de forma rápida (regra da cadeia)

$$h(u, v, w) := (f \circ g)(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w))$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & u \\
 & & & & & \nearrow & \\
 & & & & x & \longrightarrow & v \\
 & & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & & & & w \\
h & \longleftrightarrow & f & & & & \\
 & & & & & & u \\
 & & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & y & \longrightarrow & v \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & & & & & w
\end{array}$$

$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

3) Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma função C^1 tal que $\gamma(1) = (1,1,1)$ e $\gamma'(1) = (1,2,3)$. Calcule $(h \circ \gamma)'(1)$ onde $h(x,y,z) = x^4 + y^2 + z^3$.

Resolução: Do Teorema da Derivada Composta sabemos que $h \circ \gamma$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, sendo em particular diferenciável no ponto 1. Além disso temos que

$$(h \circ \gamma)'(1) = Dh(\gamma(1)) \cdot \gamma'(1).$$

Cálculo auxiliar

$$Dh(x,y,z) = [4x^3 \;\; 2y \;\; 3z^2]$$

Assim

$$(h \circ \gamma)'(1) = [4 \; 2 \; 3] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 17.$$

4) Exercício 2c) da Ficha 7.

Resolução: A região de integração neste exercício é dada pelo conjunto

$$R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le x \le 2, \; 0 \le y \le \sqrt{2x - x^2}\}.$$

Escrevemos R em coordenadas polares modificadas,[3]

$$x = 1 + r\cos\theta$$

$$y = r \operatorname{sen}\theta$$

onde $\theta \in (0,\pi)$ e $r \in (0,1)$. Assim, usando o Teorema de mudança de variáveis com

$$T(r,\theta) = (1 + r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta),$$

e dado que $|\det DT(r,\theta)| = r$, obtemos que

$$\begin{aligned} I := \int\int_R x^2 + y^2 \, dx\, dy &= \int_0^{\pi} \int_0^1 [(1 + r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2] r \, d\theta\, dr \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 + 2r\cos\theta) r \, d\theta\, dr = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

5) Dado

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x < z < 2 - x^2, \; 0 < y < 1, \; x > 0\}$$

Calcule o volume de V usando uma (e só de uma!!!) das seguintes ordens de integração: $dx\, dz\, dy$ ou $dy\, dz\, dx$

Resolução: Escolhemos por exemplo a ordem: $dy\, dz\, dx$. Começamos por dar o intervalo de integração para a variável x. Temos que $x < 2 - x^2$ e $x > 0$ se e somente se[4] $x \in]0,1[$. Para cada x fixo, é claro que $x < z < 2 - x^2$ e $0 < y < 1$. Assim

$$Vol(V) = \int_0^1 \left[\int_x^{2-x^2} \left[\int_0^1 1\, dy \right] dz \right] dx = \int_0^1 (2 - x^2 - x)\, dx = \frac{7}{6}$$

[3] Notemos que $y = \sqrt{2x - x^2}$ se e só se $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $y > 0$ (parte da circunferência com centro em $(1,0)$ e raio 1 situada no semi-plano $y > 0$). Note ainda que se o ponto (x,y) satisfaz $(x-1)^2 + y^2 < 1$ então $(x-1,y)$ está no semi-círculo centrado na origem e raio 1.

[4] Note que $2 - x^2 - x = 0$ se e somente se $x = 1, -2$

6) Dado

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2, \ -1 < x < 1\}$$

Obtenha uma expressão para

(a) Comprimento de A

(b) Carga eléctrica de A sabendo que a sua densidade de carga eléctrica é dada por $\rho(x,y) = x$

Resolução:

(a) O comprimento de A, que designaremos por $\mathrm{Comp}(A)$ é por definição

$$\mathrm{Comp}(A) = \int_A 1\, ds$$

Para calcular este integral, começamos por dar uma parametrização de A (arco de parábola)

$$g(x) = (x, x^2), \quad -1 < x < 1$$

Assim, mais uma vez por definição,

$$\mathrm{Comp}(A) = \int_A 1\, ds = \int_{-1}^{1} ||g^{'}(x)||\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+4x^2}\, dx$$

(b) A carga eléctrica de A, que designaremos por $C_e(A)$ é por definição

$$C_e(A) = \int_A \rho\, ds$$

que por sua vez, usando o que foi feito na alínea anterior é então

$$C_e(A) = \int_A \rho\, ds = \int_{-1}^{1} \rho(g(x))||g^{'}(x)||\, dx = \int_{-1}^{1} x\sqrt{1+4x^2}\, dx$$

Observação: E se lhe pedissem para calcular estes integrais, saberia fazê-lo?

1. Calcule a massa de

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = x^2, \ 0 < z < 1, \ -2 > x < 2\}$$

sabendo que a sua densidade de massa é dada por $\rho(x,y,z) = \sqrt{1+4x^2}$.

Resolução: Por definição a massa de S, que designamos por M(S), é dada por

$$\mathsf{M(S)} = \int\int_S \rho\, dS$$

Para calcular este integral, começamos por dar uma parametrização de A (parte de um cilindro parabólico)

$$g(x,z) = (x, x^2, z) \ -2 < x < 2, \ 0 < z < 1$$

Assim concluimos que

$$\mathsf{M(S)} = \int\int_S \rho\, dS = \int_{-2}^{2} \left[\int_0^1 \rho(g(x,z)) \left|\left| \frac{\partial g(x,z)}{\partial x} \times \frac{\partial g(x,z)}{\partial z} \right|\right| \ dz\right] dx = \int_{-2}^{2} \left[\int_0^1 1 + 4x^2 \ dz\right] dx = 76/3$$