O papel fundamental da Matemática

Miguel Abreu

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico
e
Sociedade Portuguesa de Matemática

O papel fundamental da Matemática

Sumário

- O papel formativo da Matemática
- O papel científico e tecnológico da Matemática
- O “peso” da Matemática num curso de engenharia
- Alguns exemplos
- A Matemática como possível profissão

O papel formativo da Matemática

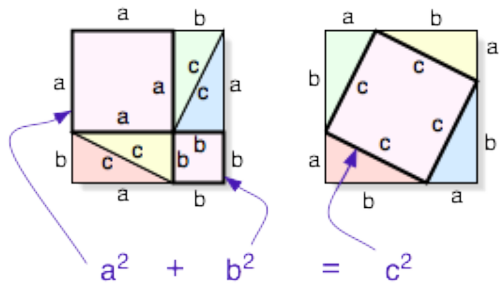
A Matemática é
a preparação física da mente.

O papel formativo da Matemática

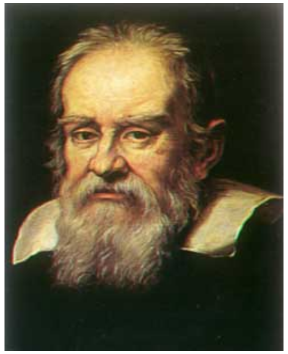
- Treino mental para a formulação e resolução de problemas.
- Estimula curiosidade, imaginação e capacidade de abstracção.
- Cria confiança na capacidade de raciocínio lógico e dedutivo.
- Prepara capacidade de adaptação ao futuro.

O papel científico e tecnológico da Matemática

- *"A matemática é o caminho para perceber o universo."*
  Pitágoras, séc.VI a.c.



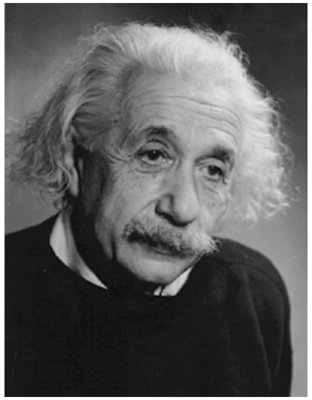
- *"As leis da natureza estão escritas na linguagem da matemática."*
  Galileu, séc. XVI e XVII



O papel científico e tecnológico da Matemática

- *"Quando se referem à realidade as leis da matemática não são certezas absolutas. Quando são certezas absolutas não se referem à realidade."*

"Uma equação matemática é eterna."

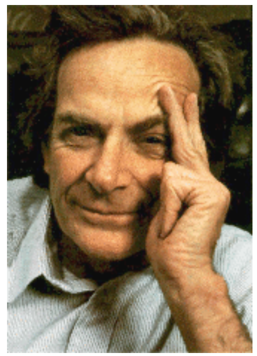


Einstein, séc. XX

O papel científico e tecnológico da Matemática

- *"Os físicos não podem converter-se a uma linguagem diferente da matemática. Se se quer aprender algo sobre a natureza é necessário compreender a linguagem que ela fala. Ela oferece-nos a informação apenas de uma forma: não somos presunçosos ao ponto de lhe pedir que mude."*

  Feynman, séc. XX



O papel científico e tecnológico da Matemática

- Ferramenta mental que permite modelar, analisar e prever o funcionamento do mundo que nos rodeia.
- Linguagem da ciência, engenharia e tecnologia.
- Sistematiza e generaliza a partir de casos particulares.

O papel científico e tecnológico da Matemática

- Novas tecnologias confirmam este papel fundamental da Matemática.

"Poucas pessoas reconhecem que a celebrada alta tecnologia de hoje é essencialmente uma tecnologia matemática."

Edward E.David, Exxon Corporation, 1984.

O papel científico e tecnológico da Matemática

"Enquanto que a energia da sociedade industrial são os combustiveis fósseis (petróleo, carvão, gás, etc), a energia da sociedade do conhecimento é a matemática.

Para criarmos conhecimento queimamos matemática."

- adaptado de "Life by the numbers", série de programas televisivos sobre matemática, 1996.

O papel científico e tecnológico da Matemática

- Matemática e a Internet

  A fiabilidade (detecção e correcção de erros), eficiência (compressão de dados) e segurança (confidencialidade e integridade dos dados) da Internet, "queimam" muita Matemática (Teoria de Códigos, baseada em Álgebra e Teoria dos Números).

O papel científico e tecnológico da Matemática

- Press Release, Julho 2003

  Cientistas da NYU desenvolvem método matemático preciso para análise de dados genéticos.

  "Embora a matemática exista há milhares de anos, a sua relação com a biologia é muito recente. A nossa investigação tem-se concentrado na melhor maneira de usar pensamento quantitativo para melhorar a investigação em biologia"

  Bud Mishra, Professor de Matemática e Ciência da Computação na NYU

O papel científico e tecnológico da Matemática

- Apostar na Investigação e Desenvolvimento e num Choque Tecnológico como motores de crescimento do país, implica assim um grande esforço de produção de Matemática.
- Esse esforço começa por ensinar e aprender melhor Matemática. Depende portanto de cada um de nós, professores e alunos, básico, secundário e universitário.

O “peso” da Matemática num curso de engenharia

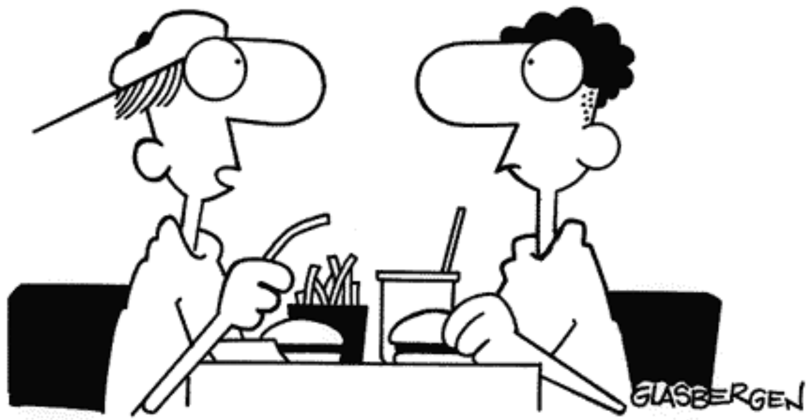
Estrutura curricular típica dos 2 primeiros anos de um curso de engenharia do Instituto Superior Técnico			
1º ano		**2ºano**	
1º sem.	**2º sem.**	**1º sem.**	**2º sem.**
Cálculo I	Cálculo II	Cálculo III	-------
Álgebra	Computação	Numérica	Prob. e Est.
+ 3	+ 3	+ 3	+ 4

O "peso" da Matemática num curso de engenharia

- 35% dos 2 primeiros anos são matemática e pelo menos mais 10% são física (2 cadeiras).

- Aprender matemática de facto, não apenas decorar receitas para testes e exames, é fundamental para ter sucesso em qualquer curso superior de ciência/eng./tecnologia.

O “peso” da Matemática num curso de engenharia



“I forgot to make a back-up copy of my brain, so everything I learned last semester was lost.”

O “peso” da Matemática num curso de engenharia

“Aprender Física e aprender Matemática exige esforço, exige concentração, exige trabalho, exige fazer muitos exercícios, exige testar muitas vezes os conhecimentos, ginasticar o raciocínio. […] A arte nacional do desenrascanço pode permitir vestir de belas palavras uma resposta ignorante em Humanidades - mas esbarra sem apelo nem agravo perante um problema concreto de Física ou de Matemática.”

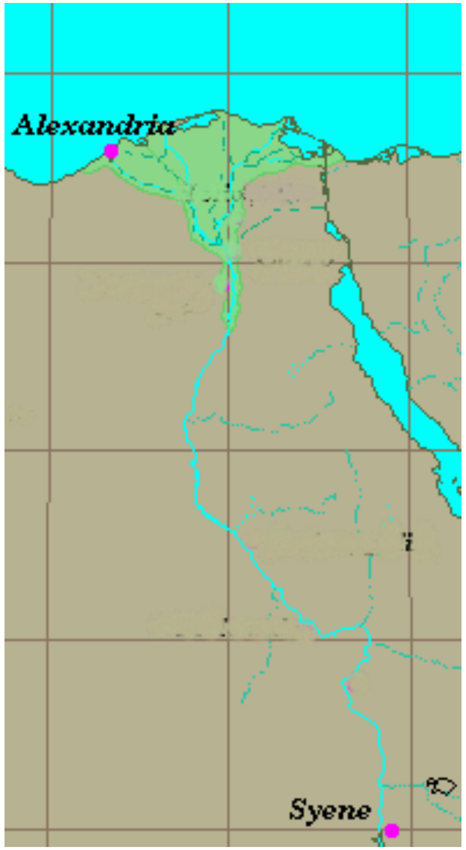
José Manuel Fernandes, Público, 16/5/2001

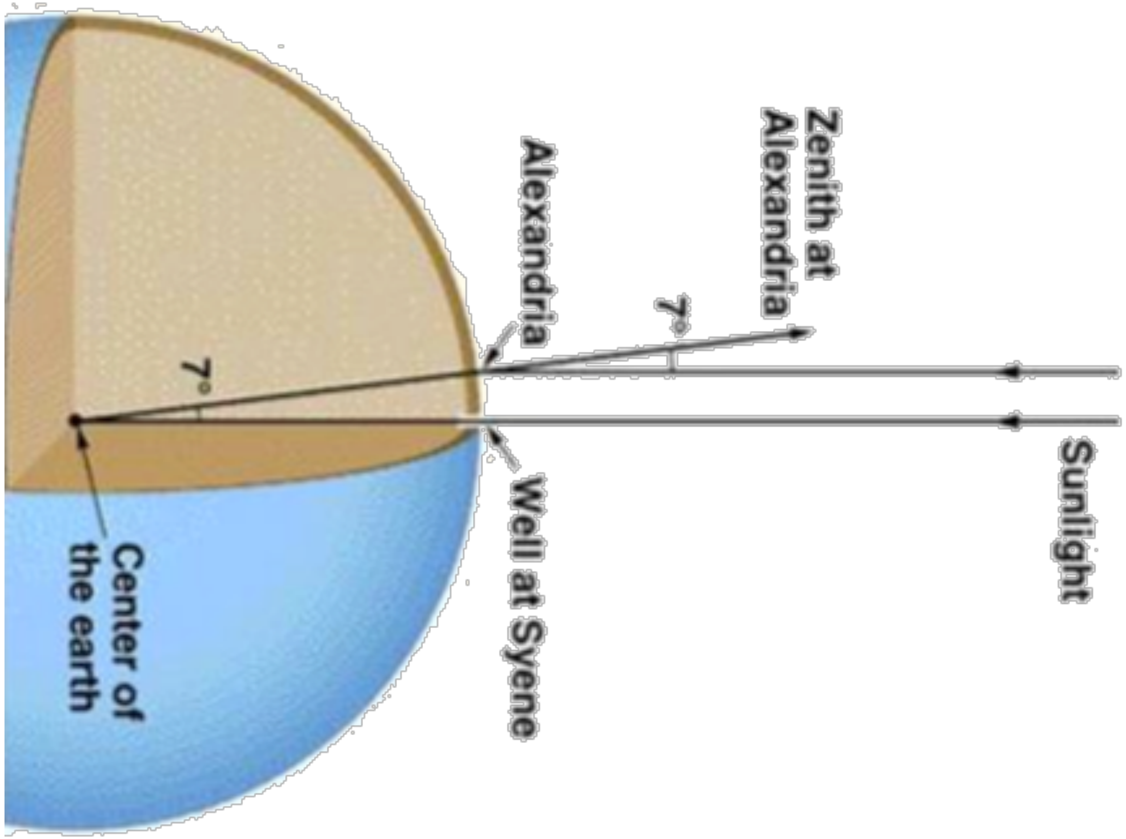
Alguns exemplos: Erastótenes

- Erastótenes de Cirene, matemático grego, determinou por volta de 240 a.c. que a Terra era redonda com cerca de 40.000 km de perímetro!
- Usou apenas noções elementares de geometria plana para explicar porque é que num mesmo instante de um dia de sol, objectos idênticos colocados a diferentes latitudes fazem sombras com diferentes comprimentos.

Alguns exemplos: Erastótenes

Alguns exemplos: Erastótenes





Alguns exemplos: BI

- Para que serve o misterioso algarismo suplementar que se segue ao número do nosso BI?

07690576	4

- Jorge Buescu, *O Mistério do Bilhete de Identidade e Outras Histórias: Crónicas das fronteiras da ciência*, Gradiva, 2001.

Alguns exemplos: BI

- É um algarismo de controle ou código. Serve para detectar os dois tipos de erros mais usuais na escrita de um número: erros singulares e erros de transposição.
- Exemplo:

07690576	4

erro singular

07691576	4

erro de transposição

07690567	4

Alguns exemplos: BI

$a_8\ a_7\ a_6\ a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1$	c

- O algarismo de controle **c** é o único número inteiro entre 0 e 10 (inclusive) que torna a soma

  $$S = 9a_8 + 8a_7 + 7a_6 + 6a_5 + 5a_4 + 4a_3 + 3a_2 + 2a_1 + \mathbf{c}$$

  divisível por 11.

Alguns exemplos: BI

- Exemplo:

07690576	4	➔	$S = 209 = 11 \times 19 + 0$
07691576	4	➔	$S = 214 = 11 \times 19 + 5$
07690567	4	➔	$S = 208 = 11 \times 18 + 10$

Alguns exemplos: BI

- Este código, quando devidamente implementado (...), permite detectar qualquer erro singular e qualquer erro de transposição. No entanto, não permite corrigir automaticamente esse erro.
- Exercício: provem esta propriedade do código do BI (o segredo está no facto de 11 ser um número primo).

Alguns exemplos: BI

Problema

Qual o número máximo de algarismos do BI para o qual o código funciona com a propriedade anterior?

Como alterá-lo por forma a poder ser devidamente usado em números com mais algarismos (e.g. NIB)?

Alguns exemplos: códigos

- Códigos são usados em geral com um dos seguintes objectivos:
  - Segurança: garantir confidencialidade e integridade dos dados – criptografia.
  - Eficiência: optimizar velocidade de comunicação – compressão de dados.
  - Fiabilidade: detectar e **corrigir** erros de comunicação.

Alguns exemplos: códigos

- Actualmente, qualquer código usado na prática é fortemente baseado em matemática.
- Um exemplo notável é o código de Hamming para correcção de erros, inventado em 1950 pelo americano Richard Hamming.

  É um código para transmissão de dados binários = sequências de 0´s e 1´s (bits).

Alguns exemplos: códigos para correcção de erros

- A maneira mais fácil de detectar erros singulares de comunicação é a repetição.
- Exemplo: dupla repetição
  - Mensagem original: 1 0 1 1
  - Mensagem codificada: 11 00 11 11
  - Mensagem corrompida: 11 00 10 11

Alguns exemplos: códigos para correcção de erros

- Repetição também pode ser usada para corrigir erros singulares de comunicação.
- Exemplo: tripla repetição
  - Mensagem original: 1 0 1 1
  - Mensagem codificada: 111 000 111 111
  - Mensagem corrompida: 111 000 101 111

Alguns exemplos: códigos para correcção de erros

- A tripla repetição permite aumentar a fiabilidade da comunicação, mas diminui muito a sua eficiência: a mensagem codificada tem o triplo do comprimento da mensagem original (200% de custo adicional).
- Usando um pouco de matemática é possível melhorar bastante este compromisso.

Alguns exemplos: adição binária

- Pensando no 0 como "um número par" e no 1 como "um número ímpar", faz sentido definir adição no conjunto {0,1} da seguinte forma:

$$0 + 0 = 0\,, \qquad 0 + 1 = 1 + 0 = 1 \quad \text{e}$$

$$1 + 1 = 0.$$

Alguns exemplos: adição binária

- Esta **adição** no conjunto $\{0,1\}$ satisfaz as propriedades usuais: comutativa, associativa, existência de elemento neutro e simétricos.
- É de notar que o facto de $1 + 1 = 0$ significa que $1 = -1$!! Como também $0 = -0$, temos que em **adição binária** qualquer número é igual ao seu simétrico: $a = -a$.

Alguns exemplos: código de Hamming

- Usando adição binária, o código de Hamming é definido da seguinte forma:
  - Mensagem original: $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$
  - Mensagem codificada: $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ c_1\ c_2\ c_3$ com c_1, c_2 e c_3 dados por

$$c_1 = a_1 + a_2 + a_3 \qquad\qquad a_1 + a_2 + a_3 + c_1 = 0$$

$$c_2 = a_1 + a_3 + a_4 \quad \text{ou seja} \quad a_1 + a_3 + a_4 + c_2 = 0$$

$$c_3 = a_2 + a_3 + a_4 \qquad\qquad a_2 + a_3 + a_4 + c_3 = 0$$

Alguns exemplos: código de Hamming

Exemplo:

- Mensagem original: $a_1\ a_2\ a_3\ a_4 = 1\ 0\ 1\ 1$
- $c_1 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 0 + 1 = 0$

  $c_2 = a_1 + a_3 + a_4 = 1 + 1 + 1 = 1$

  $c_3 = a_2 + a_3 + a_4 = 0 + 1 + 1 = 0$
- Mensagem codificada:

  $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ c_1\ c_2\ c_3 = 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0$

Alguns exemplos: código de Hamming

- Como vamos ver, este código permite corrigir qualquer erro singular por mensagem transmitida, usando apenas um custo de adicional de 75% sobre o comprimento da mensagem original – muito mais eficiente do que os 200% da tripla repetição.

Alguns exemplos: código de Hamming

Correcção de erros singulares

- Mensagem enviada: $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ c_1\ c_2\ c_3$ com

$$a_1 + a_2 + a_3 + c_1 = 0$$

$$a_1 + a_3 + a_4 + c_2 = 0$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + c_3 = 0$$

- Mensagem recebida: $b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ d_1\ d_2\ d_3$

Alguns exemplos: código de Hamming

Correcção de erros singulares

- Mensagem recebida:

$$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ d_1\ d_2\ d_3$$

- Calcular

$$e_1 = b_1 + b_2 + b_3 + d_1$$
$$e_2 = b_1 + b_3 + b_4 + d_2$$
$$e_3 = b_2 + b_3 + b_4 + d_3$$

$e_1\ e_2\ e_3$	Corrigir
0 0 0	---
0 0 1	d_3
0 1 0	d_2
0 1 1	b_4
1 0 0	d_1
1 0 1	b_2
1 1 0	b_1
1 1 1	b_3

Alguns exemplos: código de Hamming

Exemplo: $b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, d_1\, d_2\, d_3 = 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0$

- Calcular: $e_1 = b_1+b_2+b_3+d_1 = 1+0+0+0 = 1$

  $e_2 = b_1+b_3+b_4+d_2 = 1+0+1+1 = 1$

  $e_3 = b_2+b_3+b_4+d_3 = 1+0+1+1 = 1$
- Como $e_1\ e_2\ e_3 = 1\ 1\ 1$ há que corrigir b_3.
- Mensagem enviada: 1 0 1 1 0 1 0
- Mensagem original: 1 0 1 1

Alguns exemplos: código de Hamming

- Exercício: mostre que o código de Hamming pode também ser usado para detectar, mas não para corrigir, dois erros por mensagem transmitida.

Alguns exemplos: códigos de Reed-Solomon

- Usando matemática mais elaborada, mas que pode ser ensinada numa disciplina do 1ºano do ensino superior, os americanos Irving Reed e Gustave Solomon desenvolveram em 1960 os códigos correctores de erros usados agora em qualquer CD ou DVD.

Conclusão

Sempre que ouvimos música num CD
ou vemos filmes em DVD
estamos a
queimar Matemática.

A melhor profissão do mundo

1. Matemático
2. Actuário
3. Estatístico
4. Biólogo
5. Eng. Informático

...

200. Lenhador

Fonte: estudo da CareerCast.com, Janeiro 2009.