Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

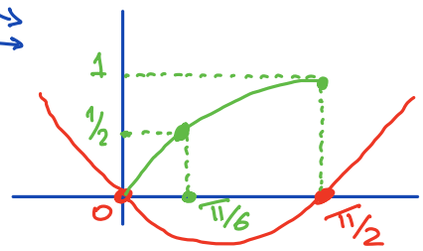
RECURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC

1º SEM. 2022/23 08/FEV/2023, 08.00 DURAÇÃO: 2H

1. (2,0 val.) Considere o conjunto

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, |\operatorname{sen}(x)| < \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x(2x-\pi) \leq 0 \right\}.$$

(a) Mostre que $A = [0, \pi/6[$.



- $x(2x-\pi) \leq 0 \iff x \in [0, \pi/2]$
- Para $x \in [0, \pi/2]$ o seno é ≥ 0 e estritam/ crescente, pelo que $|\operatorname{sen}(x)| < 1/2 \iff 0 \leq \operatorname{sen}(x) < 1/2 \iff$
  $\iff \operatorname{arcsen}(0) \leq x < \operatorname{arcsen}(1/2) \iff 0 \leq x < \pi/6$
- Logo, $A = [0, \pi/6[$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap \{1/n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$.

- $\left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, 1/2, 1/3, \ldots \right\}$

  Como $1/2 < \pi/6 < 1$, temos que

$B := A \cap \{1/n, n \in \mathbb{N}\} = \{1/n, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2\} = \{1/2, 1/3, \ldots\}$.

Assim, $\sup B = \max B = 1/2$ e

$\inf B = 0 \notin B$ pelo que

B não tem mínimo.

2. (2,0 val.)

(a) Use indução para mostrar que

$$P(n) \equiv \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\boxed{P(1)}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{(k+1)!} \overset{?}{=} 1 - \frac{1}{(1+1)!}$

$\displaystyle \overset{\shortparallel}{1/2} \overset{\checkmark}{=} \overset{\shortparallel}{1 - 1/2}$

$\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$ Hip.: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ para um det. $n \in \mathbb{N}$ fixo

A provar: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$ para o mesmo det. $n \in \mathbb{N}$

Dem.: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} =$

$\displaystyle \overset{\text{Hip.}}{=} 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \left(\frac{(n+2) - (n+1)}{(n+2)!} \right)$

$\displaystyle = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$ // $\checkmark$

(b) Justifique que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$$

é convergente e calcule a sua soma.

Pela alínea anterior temos que a sucessão de somas parciais desta série, $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$, é dada por $s_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Temos então que s_n é convergente e $\lim s_n = 1$, pelo que a série é convergente e $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1$ //

3. (1,5 val., 2MAP45) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x) - x}{x^2}, & \text{se } x > 0; \\[2ex] -\operatorname{senh}(x/3), & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua no ponto zero. $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$? Sim

- $f(0) = -\operatorname{senh}(0) = 0 = \lim_{x\to 0^-} -\operatorname{senh}(x/3) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$.
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan(x) - x}{x^2} = \dfrac{0}{0} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{2x} =$

$= \lim_{x\to 0^+} \dfrac{-x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}(1+x^2)} = 0$ //

(b) Verifique se f é ou não diferenciável no ponto zero.

- $f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} (-\operatorname{senh}(x/3))' = \lim_{x\to 0^-} \left(-\cosh(x/3)\cdot \frac{1}{3}\right) = -1/3$
- $f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan(x) - x}{x^3} = \dfrac{0}{0} \overset{R.C.}{=}$

$\overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{-\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}(1+x^2)} = -1/3$

$\Rightarrow$ f é dif. em zero e $f'(0) = -1/3$ //

4. (1,5 val., 2MAP45) Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) e^x \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} [1 - \cos(x)]^{\frac{1}{\log x}} .$$

- $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen}(1/x)\cdot e^x = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{e^{-x}} = \dfrac{0}{0} \overset{RC}{=}$

$\overset{RC}{=} \lim_{x\to +\infty} \dfrac{\cos(1/x)\cdot(-1/x^2)}{-e^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} \cos(1/x)\cdot \dfrac{e^x}{x^2} = 1\times(+\infty) = +\infty$

- $\lim_{x\to 0^+} (1-\cos(x))^{1/\log x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\log\left[(1-\cos(x))^{1/\log x}\right]} = \boxed{e^2}$ //

$\boxed{C.A.}$ $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log(1-\cos(x))}{\log x} = \dfrac{-\infty}{-\infty} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)}}{\frac{1}{x}} =$

$= \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)} = \dfrac{0}{0} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} =$

$= \lim_{x\to 0^+} \left(1 + \dfrac{x}{\operatorname{sen}(x)}\cdot\cos(x)\right) = 2$

5. (3,0 val., 2MAP45) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $\dfrac{1+x}{1+x^2}$ (b) $\cos^2(x)$ (c) $\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}$ (sugestão: $t = e^x$)

(a) $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+x^2} = \int \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} = \arctan(x) + \frac{1}{2}\log(1+x^2)$ //

(b) $\displaystyle\int \cos^2(x) = \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right) = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}$ //

$\displaystyle\left(= \frac{x + \operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)}{2} \right)$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}\,dx = \int \frac{t^2}{(t^2-1)(1+t)}\,\frac{1}{t}\,dt =$

$t = e^x \Leftrightarrow x = \log t,\ t>0$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{t}\,dt$

$\displaystyle = \int \frac{t}{(t+1)^2(t-1)}\,dt = (*)$

$\boxed{\text{C.A.}}$ $\displaystyle\frac{t}{(t+1)^2(t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t-1}$

$\Rightarrow A(t+1)(t-1) + B(t-1) + C(t+1)^2 = t$

$t=-1 \Rightarrow -2B = -1 \Rightarrow \boxed{B = 1/2}$

$t=1 \Rightarrow 4C = 1 \Rightarrow \boxed{C = 1/4}$

$t=0 \Rightarrow -A - B + C = 0 \Rightarrow A = -B + C = -1/2 + 1/4 \Rightarrow \boxed{A = -1/4}$

$\displaystyle(*) = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{t-1} =$

$\displaystyle = -\frac{1}{4}\log|t+1| - \frac{1/2}{t+1} + \frac{1}{4}\log|t-1|$

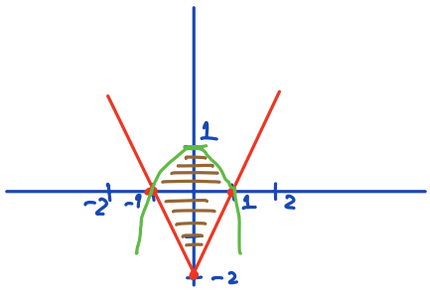
$\displaystyle = -\frac{1}{4}\log|e^x+1| - \frac{1/2}{e^x+1} + \frac{1}{4}\log|e^x-1|$ //

$t = e^x$

6. (2,0 val.)

(a) Determine a área da região plana limitada pelas curvas $y = 2(|x| - 1)$ e $y = 1 - x^4$.

$$\text{Área} = \int_{-1}^{1} \left[(1-x^4) - 2(|x|-1)\right] dx$$



$$= 2\int_0^1 (1 - x^4 - 2x + 2)\, dx$$

$$= 2\int_0^1 (3 - 2x - x^4)\, dx = 2\left[3x - x^2 - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= 2\left(3 - 1 - 1/5\right) = 2\left(2 - 1/5\right) = 2 \times 9/5 = 18/5$$

(b) Calcule, se existir, o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{arcsen}(\sqrt{t})\, dt}{x^3}. = \frac{0}{0} =$$

$$\overset{RC}{\underset{+TFC}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(\sqrt{x^2}) \cdot 2\cancel{x}}{3x^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} \frac{\operatorname{arcsen}(|x|)}{x}$$

$$= \begin{cases} \xrightarrow{x\to 0^-} \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{3} \frac{\operatorname{arcsen}(-x)}{x} = \frac{0}{0} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{3} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -2/3 \\ \xrightarrow{x\to 0^+} \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3} \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x} = \frac{0}{0} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{arcsen}(\sqrt{t})\, dt}{x^3} \quad \text{não existe.}$$

7. (2,0 val.) Determine a natureza das seguintes séries numéricas e calcule a soma de uma delas:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+4}{5^{n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{1/n}-1\right).$$

- $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+4}{5^{n+1}} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{4}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n =$$

séries geométricas de razões $|r = 2/5| < 1$ e $|r = 1/5| < 1$, logo convergentes

$$= \frac{1}{5}\,\frac{1}{1-2/5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{1-1/5} = \frac{1}{3} + \frac{4}{4} = 4/3$$

- As séries $\sum_n (e^{1/n}-1)$ e $\sum_n \frac{1}{n}$ são séries de termos não-negativos de mesma natureza, pois

$$\lim \frac{e^{1/n}-1}{1/n} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1 \quad \text{e} \quad 0<1<+\infty.$$

Como a série harmónica $\sum_n \frac{1}{n}$ é divergente, concluímos que a série $\sum_n (e^{1/n}-1)$ também é divergente.

8. (3,0 val.) Seja f a função definida pela série de potências $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x+2)^n}{\sqrt{2n+3}}$.

(a) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série de potências é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x+2)^n}{\sqrt{2n+3}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2n+3}} \left(x - (-2/3)\right)^n$

- Raio de convergência

$R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{3^n \sqrt{2n+5}}{3^{n+1}\sqrt{2n+3}} = 1/3$

$\Rightarrow \begin{cases} \bullet \text{ série abs. conv. qd } |x-(-2/3)| < 1/3 \Leftrightarrow x \in \left]-1, -\frac{1}{3}\right[\\ \bullet \text{ série divergente qd } |x-(-2/3)| > 1/3 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[\end{cases}$

- Extremos: $\boxed{x=-1} \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$ série alternada com parte positiva $\frac{1}{\sqrt{2n+3}} \searrow 0 \Longrightarrow$ série conv. (Crit. de Leibniz)

Abs. conv.? $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$. Como $\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+3}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ é div. (Dirichlet c/ $p = \frac{1}{2} \leq 1$), temos que $\sum_n \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ é div. Assim, a série de potências é simplesm/ conv. quando $x=-1$.

$\boxed{x = -1/3} \rightsquigarrow \sum_n \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ que já vimos ser uma série div.

Assim, a série de potências é divergente quando $x = -\frac{1}{3}$.

(b) Determine $f^{(11)}(-2/3)$.

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2n+3}} \left(x-(-2/3)\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(-2/3)}{n!} \left(x-(-2/3)\right)^n$

(série de Taylor em $a = -2/3$)

$\Rightarrow \frac{f^{(n)}(-2/3)}{n!} = \frac{3^n}{\sqrt{2n+3}}$

$\Rightarrow f^{(n)}(-2/3) = \frac{3^n \cdot (n!)}{\sqrt{2n+3}} \Rightarrow f^{(11)}(-2/3) = \frac{3^{11} \cdot (11!)}{5}$

9. (1,5 val.) Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim_{x\to-\infty} \frac{\phi(x)}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\phi(x)}{x}$. Mostre que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(a) + a = 0$.

Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \phi(x) + x$.

Temos que:

- $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} (\phi(x)+x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\underbrace{\frac{\phi(x)}{x}}_{\to 0} + 1\right) =$

  $= (-\infty)\cdot 1 = -\infty \Rightarrow \exists\, L<0 : h(L) < 0.$

- $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} (\phi(x)+x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\underbrace{\frac{\phi(x)}{x}}_{\to 0} + 1\right) =$

  $= (+\infty)\cdot 1 = +\infty \Rightarrow \exists\, R>0 : h(R) > 0.$

Como h é contínua em $[L,R]$ e $h(L)\cdot h(R) < 0$, temos pelo TVI que $\exists\, a \in]L,R[$ tal que $h(a) = \phi(a) + a = 0$.

10. (1,5 val., 2MAP45) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável tal que $f'(0) = 0$ e $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Consider a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(\operatorname{sen}(x))$. Determine e classifique os extremos locais da função φ.

- $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'$ estritamente crescente. Como $f'(0) = 0$ temos então que $f'(x) < 0$, $x<0$, e $f'(x) > 0$, $x > 0$.
- $\varphi'(x) = (f(\operatorname{sen}(x)))' = f'(\operatorname{sen}(x)) \cdot \cos(x)$.
- $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow f'(\operatorname{sen}(x)) = 0 \vee \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) = 0 \vee \cos(x) = 0$

  $\Leftrightarrow x = k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $\varphi''(x) = f''(\operatorname{sen}(x)) \cdot \cos^2(x) - f'(\operatorname{sen}(x)) \cdot \operatorname{sen}(x)$
- $\boxed{x = k\pi} \Rightarrow \varphi''(k\pi) = f''(0) > 0 \Rightarrow \varphi$ tem <u>mínimos locais</u> em $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\boxed{x = k\pi + \pi/2} \Rightarrow \varphi''(k\pi + \pi/2) = \begin{cases} -f'(1)\cdot 1 = -\underbrace{f'(1)}_{>0}, & k \text{ par} \\ -f'(-1)(-1) = +\underbrace{f'(-1)}_{<0}, & k \text{ ímpar} \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi''(k\pi + \pi/2) < 0 \Rightarrow \varphi$ tem <u>máximos locais</u> em $x = k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.