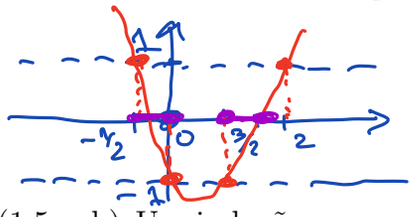
Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º EXAME DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC

1º SEM. 2021/22 10/FEV/2022, 18.00 - V. 1 DURAÇÃO: 2H

1. (1,5 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o domínio D da função definida pela expressão

$$\operatorname{arcsen}\left(2x^2 - 3x - 1\right).$$

- $D_{\operatorname{arcsen}} = [-1,1] \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2x^2 - 3x - 1 \leq 1\}$
- $2x^2 - 3x - 1 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$
  $\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1/2$
- $2x^2 - 3x - 1 = -1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x-3) = 0$
  $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3/2$
- 

$\Rightarrow D = [-1/2, 0] \cup [3/2, 2]$

2. (1,5 val.) Use indução para mostrar que a derivada de ordem n da função definida pela expressão $h(x) = 1/(x-1)$ é dada por

$$P(n) \equiv \boxed{h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(x-1)^{n+1}}\,,\ \forall x \in \,]1, +\infty[} \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\boxed{P(1)}$ $h'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} = \left(\frac{(-1)^n\, n!}{(x-1)^{n+1}}\right)\Big|_{n=1}$, $\forall x \in]1, +\infty[$ ✓

$\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

Hipótese: $h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(x-1)^{n+1}}$, $\forall x \in]1, +\infty[$, para um det. $n \in \mathbb{N}$

A provar: $h^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$, $\forall x \in]1, +\infty[$, para o mesmo det. $n \in \mathbb{N}$

Dem.: $h^{(n+1)}(x) = \left(h^{(n)}(x)\right)' \underset{\text{Hip.}}{=} \left(\frac{(-1)^n\, n!}{(x-1)^{n+1}}\right)' =$

$= (-1)^n\, n! \left((x-1)^{-n-1}\right)' = (-1)^n\, n!\, (-n-1)(x-1)^{-n-2}$

$= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$ ✓

Q.E.D.

3. (3,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em $\pi/2$ e tal que

$$f(x) = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{x - \pi/2}\,,\ \forall\, x \neq \pi/2\ .$$

(a) Mostre que $f(\pi/2) = 0$.

f contínua em $\pi/2 \Rightarrow f(\pi/2) = \lim_{x\to\pi/2} f(x) =$

$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\operatorname{sen} x}{x-\pi/2} = \frac{0}{0} \overset{R.C.}{=}$

$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{-\cos x}{1} = -\cos(\pi/2) = 0$ //

(b) Mostre que f é diferenciável em $\pi/2$.

$f'(\pi/2) = \lim_{x\to\pi/2} \frac{f(x) - \cancel{f(\pi/2)}^{=0}}{x-\pi/2} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\operatorname{sen} x}{(x-\pi/2)^2} = \frac{0}{0}$

$\overset{R.C.}{=} \lim_{x\to\pi/2} \frac{-\cos(x)}{2(x-\pi/2)} = \frac{0}{0} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2} =$

$= \frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{2} = 1/2$ //

(c) Justifique que f é diferenciável em todo o $\mathbb{R}$ e mostre que a equação $f'(x) = 0$ tem um número infinito de soluções.

- Para $x \neq \frac{\pi}{2}$, f é o quociente de funções diferenciáveis e o denominador é $\neq 0$, pelo que é diferenciável. Vimos em (b) que f é dif. em $\pi/2$, pelo que f é diferenciável em todo o $\mathbb{R}$.
- f tem um nº infinito de zeros, pois

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}(x) = 0 \wedge x \neq \pi/2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) = 1 \wedge x \neq \pi/2$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \pi/2,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

- Sendo f dif. em $\mathbb{R}$, podemos aplicar o Teorema de Rolle para concluir que f' tem pelo menos um zero entre cada dois zeros de f, pelo que f' tem também um número infinito de zeros.

4. (3,5 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $x\cosh(x^2)$ $\longrightarrow$ $\int x\cosh(x^2) = \frac{1}{2}\operatorname{senh}(x^2)$

(b) $(1+x)\log(1+x)$

(c) $\dfrac{1}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)}$ (considere a mudança de variável $t = \operatorname{sen} x$)

(b) $\int \underbrace{(1+x)}_{u'}\underbrace{\log(1+x)}_{v} = \frac{(1+x)^2}{2}\log(1+x) - \int \frac{(1+x)^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x}$

$= \frac{(1+x)^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\int(1+x) = \frac{(1+x)^2}{2}\log(1+x) - \frac{(1+x)^2}{4}$ //

(c) $\int \frac{1}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)}dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x(1+\operatorname{sen} x)}dx$

$= \int \frac{\cos x}{(1-\operatorname{sen}^2 x)(1+\operatorname{sen} x)}dx \underset{\substack{t=\operatorname{sen} x \\ dt=\cos x\,dx}}{=} \int \frac{1}{(1-t^2)(1+t)}dt$

$= \int \frac{1}{(1-t)(1+t)^2}dt = \int\left(\frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1+t)^2}\right)dt$

$= -A\log|1-t| + B\log|1+t| - \frac{C}{1+t}$

$= -A\log|1-\operatorname{sen} x| + B\log|1+\operatorname{sen} x| - \frac{C}{1+\operatorname{sen} x}$ //

$\boxed{\text{C.A.}}$ $\frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1+t)^2} = \frac{A(1+t)^2 + B(1-t)(1+t) + C(1-t)}{(1-t)(1+t)^2}$

$\Rightarrow A(1+t)^2 + B(1-t)(1+t) + C(1-t) = 1$

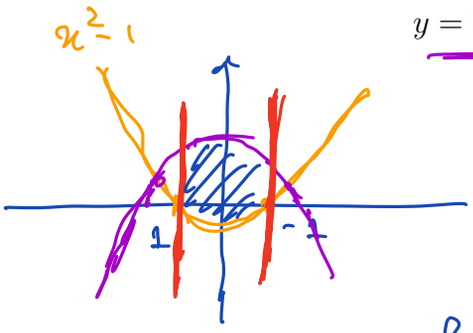
$\boxed{t=1} \Rightarrow 4A = 1 \Rightarrow \boxed{A = 1/4}$

$\boxed{t=-1} \Rightarrow 2C = 1 \Rightarrow \boxed{C = 1/2}$

$\boxed{t=0} \Rightarrow A+B+C = 1 \Rightarrow B = 1 - 1/2 - 1/4 \Rightarrow \boxed{B = 1/4}$

5. (1,5 val.) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = 2 - x^2\,, \quad y = x^2 - 1 \quad \text{e} \quad |x| = 1\,.$$



$\sqrt{\frac{3}{2}} > 1$

$2 - x^2 = x^2 - 1$

$\Rightarrow 2x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\Rightarrow \text{Área} = 2\int_0^1 \left[(2-x^2) - (x^2-1)\right] dx = 2\int_0^1 (3 - 2x^2) =$$

$$= 6 - 4\int_0^1 x^2 = 6 - 4\cdot\frac{1}{3} = 6 - 4/3 = \frac{18}{3} - \frac{4}{3} = \frac{14}{3}$$

6. (2,0 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série de potências

$$\sum_n \frac{(x+3)^n}{\sqrt{n^2+2}}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

- $R = \lim \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}}{\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+2}}} = \lim \sqrt{\dfrac{(n+1)^2+2}{n^2+2}} = 1$

- Abs. conv. qd $|x+3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x+3 < 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{-4 < x < -2}$

- Divergente qd $|x+3| > 1 \Leftrightarrow \boxed{x \in]-\infty, -4[\cup]-2, +\infty[}$

- Extremos

$\boxed{x = -4} \rightsquigarrow \sum_n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2}}$ série alternada, $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} \searrow 0$

$\xRightarrow[\text{Leibniz}]{\text{crit.}}$ convergente.

$\rightsquigarrow \sum_n \left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2}}\right| = \sum_n \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} \underset{\text{mesma natureza}}{\sim} \sum_n \dfrac{1}{n}$ div.

$\Rightarrow \boxed{\text{simplesm. conv. qd } x = -4}$

$\boxed{x = -2} \rightsquigarrow \sum_n \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}$ div.

$\Rightarrow \boxed{\text{divergente qd } x = -2}$

7. (3,0 val.) Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$g(x) = x - \arctan(x) \ .$$

(a) Mostre que $g(x) > 0$ para todo o $x > 0$.

$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0 \Rightarrow g$ é crescente e estritam/ crescente quando $x > 0$.

Como $g(0) = 0 - \arctan(0) = 0$, concluimos que $g(x) > 0$ para todo o $x > 0$.

(b) Determine o polinómio de Taylor de terceiro grau de g em $a = 0$.

- $g''(x) = \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{2x(1+x^2) - 2x\,x^2}{(1+x^2)^2} = 2x\,(1+x^2)^{-2}$ $\Rightarrow \boxed{g''(0) = 0}$
- $g'''(x) = \left(2x\,(1+x^2)^{-2}\right)' = 2\,(1+x^2)^{-2} - 4x(1+x^2)^{-3}$ $\Rightarrow \boxed{g'''(0) = 2}$
- Pela alínea anterior sabemos que $\boxed{g(0) = g'(0) = 0}$

$$\Rightarrow \boxed{P_{3,0}(x) = \frac{2}{3!}x^3 = \frac{x^3}{3}}$$

(c) Estude a convergência da série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{n} - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right]}_{\text{série de termos não-negativos por a)}} .$$

- Pela alínea b), temos que

$$\left[x - \arctan(x)\right] = \frac{x^3}{3} + R_{3,0}(x), \quad \lim_{x \to 0} \frac{R_{3,0}(x)}{x^3} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x - \arctan(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{x^3} = 1/3$$

$$\Rightarrow \lim \frac{\frac{1}{n} - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{1/n^3} = 1/3 \quad \text{e} \quad 0 < 1/3 < +\infty$$

$$\underset{\text{Crit. Comparação}}{\Longrightarrow} \sum_n \left[\frac{1}{n} - \arctan(1/n)\right] \overset{\text{mesma natureza}}{\sim} \sum_n \frac{1}{n^3}$$

Dirichlet com $p = 3 > 1$ $\Rightarrow$ convergente

8. (2,0 val.) Considere a função $h : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$h(x) = \int_1^x \frac{1 - e^{-t}}{t}\, dt\ .$$

(a) Mostre que

$$h(x) \geq (1 - e^{-1}) \log(x)\,,\ \forall x \geq 1\,.$$

$1 - e^{-t} \geq (1 - e^{-1}),\ \forall t \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow h(x) = \int_1^x \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt \geq (1-e^{-1}) \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$

$= (1-e^{-1}) \cdot \log(x)$

(b) Calcule

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{\log(x)}\ .$$

A desigualdade da alínea anterior implica

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

Assim,

$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{\log(x)} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{R.C.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1-e^{-x}}{x}}{1/x} =$

$= \lim_{x \to +\infty} (1 - e^{-x}) = 1 - 0 = 1$ //

9. (2,0 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável tal que $f''(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Mostre que se f é limitada então f é constante.

Suponhamos por absurdo que f não é constante.

Então existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(a) \neq 0$.

Suponhamos que $f'(a) > 0$ (o caso $f'(a) < 0$ é análogo).

Como $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que f' é crescente, pelo que $f'(x) \geq f'(a) > 0$, $\forall x \geq a$.

Aplicando o Teor. de Lagrange a qq intervalo da forma $[a, x]$ com $x > a$, temos que

$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi) \geq f'(a)$, p/ algum $\xi \in [a, x]$

$\Rightarrow f(x) \geq f(a) + (x-a) \underbrace{f'(a)}_{>0} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow f$ não é majorada $\Rightarrow f$ não é limitada. #