

Época de Recurso de Cálculo Diferencial e Integral I
Cursos: LMAC, MEBiom, MEFT, LEMat, LEAN, MEQ, MEAmbi, MEBiol
1º Sem. 2014/15 26/1/2015 Duração: 1h30m + 1h30m Versão B

1º TESTE

(2,0 val.) **Problema 1** Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : \arctan |x^2 - 5| \leq \pi/4\}$.

(a) Mostre que $A = [-\sqrt{6}, -2] \cup [2, \sqrt{6}]$.

(b) Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap \mathbb{Q}^-$ e $A \cap (\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+)$, onde $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^- = \mathbb{R}^- \cap \mathbb{Q}$.

(2,0 val.) **Problema 2** Use indução para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{2n-1} k((-1)^{k-1}k-1) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(4,5 val.) **Problema 3** Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow \pi/5} \frac{\sin(5x)}{x(x - \pi/5)}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(1/x)}{\log|x| + 7}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)^{1/\ln(x)}$

(3,5 val.) **Problema 4** Seja $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função contínua no ponto zero tal que

$$f(x) = \frac{\arcsen(x) - x}{x^2}, \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}.$$

(a) Mostre que $f(0) = 0$ e que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1/6$.

(b) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de f em $x = 0$.

(c) Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(0) = 2$ e $g'(0) = 3$. Calcule $(g \circ f)'(0)$.

(5,0 val.) **Problema 5** Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log(e^x + 5)$.

(a) Mostre que f é invertível e determine o domínio da sua inversa f^{-1} .

(b) Justifique que f^{-1} é diferenciável e determine $(f^{-1})'(f(3))$.

(c) Determine as assíntotas ao gráfico de f .

(d) Esboce os gráficos de f e f^{-1} .

(3,0 val.) **Problema 6** Seja f uma função diferenciável em \mathbb{R} com derivada estritamente crescente.

(a) Mostre que f não tem máximo.

(b) Mostre por meio dum exemplo que f pode não ter mínimo.

(c) Mostre que se f tem mínimo então

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

2º TESTE

(2,5 val.) **Problema 7** Determine a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabendo que $f(0) = 0$ e

$$f'(x) = x \operatorname{sen}(x^2 + 2) + (x + 3) \operatorname{sen}(x)$$

(3,0 val.) **Problema 8** Use uma substituição para mostrar que

$$\int_3^8 \frac{dx}{x(\sqrt{x+1}-1)} = \int_2^3 \frac{2u \, du}{(u^2-1)(u-1)}$$

e aproveite para calcular o integral.

(1,5 val.) **Problema 9** Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_2^{\cosh x} \frac{dt}{t^6 + 3t^2 + 1}$$

Justifique que f é diferenciável e calcule a sua derivada.

(2,0 val.) **Problema 10** Calcule a área da região contendo o ponto $(-1, 2)$ e limitada pelas curvas $y = 1/x$, $y = x^2$ e $y = 4$.

(4,5 val.) **Problema 11** Determine a natureza das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3^{n-2}} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4+3\log n)^2} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+7} + \arctan(n)}{n^2 + 5}$$

(3,5 val.) **Problema 12** Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^n \sqrt{n+8}}$$

(a) Determine o maior intervalo aberto no qual a série é absolutamente convergente.

(b) Diga justificando se a série é simplesmente convergente nalgum ponto.

(c) Seja f a função definida por esta série de potências. Justifique que

$$1/\sqrt{8} - 1/9 < f(1) < 1/\sqrt{8}.$$

(2,0 val.) **Problema 13** Considere a função $f(x) = 2x^3 \cos(3x)$.

(a) Determine a série de Taylor de f na origem.

(b) Seja $p(x)$ o polinómio de Taylor de ordem 6 de f na origem. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - p(x)}{x^7}$$

(1,0 val.) **Problema 14** Dados polinómios $p(x)$ e $q(x)$ e um ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que $q(a) \neq 0$, use o polinómio de Taylor de p/q em a para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existem constantes $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ tais que a função racional dada por

$$\frac{p(x)}{q(x)(x-a)^n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

é prolongável por continuidade a $x = a$.