

2º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
(LEMat, LEAN, MEBiol, MEQ, MEAmbi, MEAero, LMAC, MEFT, MEBiom)
1º Sem. 2014/15 05/Jan/2014 Duração: 1h30mn

VERSÃO B

1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções: (4,5 val.)

(a) $\frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)+3}}$ (b) $\frac{x+5}{(x^2+5)(x-1)}$ (c) $\arctan(3x)$

2. Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas: (1,5 val.)

$$y = e^{|x|} - 1 \quad \text{e} \quad y = 5.$$

3. Determine a natureza das séries seguintes e calcule a soma de uma delas: (4,5 val.)

(a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3 + 1/\log(n)}{n^2 - 2}$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1} + (-2)^n}{4^{n+1}}$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n(1 + (-1)^n)}{n! + e^n}$

4. Considere a função f definida pela série de potências: (3,5 val)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4 + 3}} (2x + 1)^n$$

- (a) Determine para que valores de x a série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

(b) Determine $f^{(10)}(-1/2)$.

5. Seja $f \in C^5(\mathbb{R})$ com polinómio de Taylor de ordem 4 no ponto $a = 2$ dado por (2,5 val.)

$$p_{4,2}(x) = 1 - 3(x - 2)^4.$$

- (a) Determine se f tem ou não um extremo local no ponto 2.

- (b) Sabendo que $0 \leq f^{(5)}(x) \leq x$, $\forall x \geq 2$, mostre que $|f(3) + 2| \leq 3/5!$.

6. Seja $F: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por: (2,0 val.)

$$F(x) = \int_1^x \frac{|\cos(t)|}{t(1+t)} dt.$$

- (a) Justifique que F é diferenciável e crescente em todo o seu domínio.

- (b) Mostre que F é uma função limitada.

7. Seja $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $0 \leq f(x) \leq M$, para todo o $x \geq 0$ e uma dada constante $M > 0$. Considere a função $F: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida pelo integral superior (1,5 val.)

$$F(x) = \int_0^{\bar{x}} f(t) dt.$$

- (a) Dados $0 \leq x \leq y$ e sendo P_1 uma partição de $[0, x]$ e P_2 uma partição de $[x, y]$, mostre que as correspondentes somas superiores $U(f, P_1)$ e $U(f, P_2)$ satisfazem a desigualdade

$$U(f, P_1) + U(f, P_2) \geq F(y).$$

- (b) Mostre que $F(y) \leq F(x) + M(y - x)$ para quaisquer $0 \leq x \leq y$.