Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste - 8 de Novembro de 2014 - 12h00m (Versão 1)
Cursos: LMAC, MEBiom, MEFT, LEMat, LEAN, MEQ, MEAmbi, MEBiol

(2,0 val.) **Problema 1** Considere a função $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x+1) + \sqrt{2-x^2}$.

(a) Mostre que o domínio de f é o conjunto $D_f = \left]-1, \sqrt{2}\right]$.
(b) Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de D_f e de $D_f \cap \mathbb{Q}$.

Res: (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : 2 - x^2 \geqslant 0\} =]-1, +\infty[\cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] =]-1, \sqrt{2}]$.

(b) $\sup D_f = \sqrt{2} = \max D_f$, $\inf D_f = -1$, D_f não tem mínimo.

$\sup(D_f \cap \mathbb{Q}) = \sqrt{2}$, $\inf(D_f \cap \mathbb{Q}) = -1$, $D_f \cap \mathbb{Q}$ não tem máximo nem mínimo.

(3,5 val.) **Problema 2** Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x^2-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(1-\cos(1/x)\big)\operatorname{sen}(\mathrm{e}^x)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right)^{\ln x}$

Res: (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x^2-1} = \frac{\operatorname{sen} 3}{0^+} = +\infty$, visto que $\operatorname{sen} 3 > \operatorname{sen}\pi = 0$.

(b) Como $\cos(1/x) - 1 \leqslant \big(1-\cos(1/x)\big)\operatorname{sen}(\mathrm{e}^x) \leqslant 1 - \cos(1/x)\big)$, pelo princípio do encaixe temos que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(1-\cos(1/x)\big)\operatorname{sen}(\mathrm{e}^x) = 0$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} = 0.$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(1-\frac{2}{\ln x}\right)^{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln x \ln\left(1-\frac{2}{\ln x}\right)} = \exp\left(\lim_{x\to 0^+} \ln x \ln\left(1-\frac{2}{\ln x}\right)\right)$. Por outro lado,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x \ln\left(1-\frac{2}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1-\frac{2}{\ln x}\right)}{\frac{1}{\ln x}} = \frac{0}{0}$$

$$(R.C.) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\left(\frac{-2}{\ln x}\right)'}{1-\frac{2}{\ln x}}}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2}{1-\frac{2}{\ln x}} = -2,$$

concluímos que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(1-\frac{2}{\ln x}\right)^{\ln x} = \mathrm{e}^{-2}$.

(3,0 val.) **Problema 3** Considere a função $f\colon \left]-1, 1\right] \to \mathbb{R}$ definida no seu domínio por:

$$f(x) = (x-1)\sqrt{\cos\big(\pi x^4/2\big)}$$

(a) Calcule a derivada à esquerda de f no ponto $x = 1$ usando a definição de derivada.
(b) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 1$.
(c) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de f em $x = 0$.

Res: (a) $\displaystyle f'_{\mathrm{e}}(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{\cos\big(\pi x^4/2\big)} = \sqrt{\cos(\pi/2)} = 0.$

(b) Para $x \neq 1$ temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{\cos\left(\pi x^4/2\right)} + (x-1)\left(\sqrt{\cos\left(\pi x^4/2\right)}\right)' \\ &= \sqrt{\cos\left(\pi x^4/2\right)} - (x-1)\frac{\pi x^3 \operatorname{sen}\left(\pi x^4/2\right)}{\sqrt{\cos\left(\pi x^4/2\right)}}. \end{aligned}$$

(c) Pela expressão calculada na alínea anterior temos que $f'(0) = 1$. Como $f(0) = -1$, a recta tangente ao gráfico de f em $x = 0$ é a recta de equação $y = x - 1$.

(4,5 val.) **Problema 4** Considere a função $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - 4x + \ln(x^2)$.

(a) Calcule os limites de f em 0, $-\infty$ e $+\infty$.
(b) Estude a monotonia e a concavidade, determine os extremos e os pontos de inflexão e esboce o gráfico de f.
(c) Mostre por indução que, para qualquer $n \geqslant 2$, a derivada de ordem n de f é:

$$f^{(n)}(x) = 2(-1)^{n+1}(n-1)!\,x^{-n}$$

Res: (a)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} 1 - 4x + \ln(x^2) = -\infty. \\ \lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty} 1 - 4x + \ln(x^2) = +\infty + (+\infty) = +\infty. \\ \lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to +\infty} 1 - 4x + \ln(x^2) = -\infty + (+\infty). \end{aligned}$$

Para levantarmos esta indeterminação, comecemos por notar que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} = 0$ (pela Regra de Cauchy). Sendo assim,

$$\lim_{x\to +\infty} 1 - 4x + \ln(x^2) = \lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{1}{x} - 4 + \frac{\ln(x^2)}{x}\right) = +\infty(-4) = -\infty.$$

(b) Temos que $f'(x) = -4 + \frac{2}{x}$ para $x \neq 0$ que se anula em $x = 1/2$ (ponto crítico). A função f' é negativa em $\mathbb{R}^- \cup [1/2, +\infty[$ (logo f é estritamente decrescente) e é positiva para $x \in]0, 1/2[$ (f é estritamente crescente). A segunda derivada é igual a $f''(x) = -\frac{2}{x^2}$, em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ (sempre negativa) pelo que o gráfico da função tem sempre a concavidade voltada para baixo. Atendendo ao que foi dito, f tem um máximo local em $x = 1/2$. Pela alínea anterior sabemos também que o gráfico da função tem uma assímptota vertical em $x = 0$ e que o máximo em $x = 1/2$ não é absoluto.

(c) Para $n = 2$ temos que a igualdade é verdadeira visto que $f''(x) = -\frac{2}{x^2} = 2(-1)^3 1! x^{-2}$. Supondo agora que para algum $n \in \mathbb{N}$, $\;n \geqslant 2$ se tem

$$f^{(n)}(x) = 2(-1)^{n+1}(n-1)!\,x^{-n},$$

temos que mostrar que $f^{(n+1)}(x) = 2(-1)^{n+2} n! x^{-(n+1)}$. Tem-se:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^n)'(x) \\ (H.I.) &= \left(2(-1)^{n+1}(n-1)!\,x^{-n}\right)' \\ &= 2(-1)^{n+1}(n-1)!(-n)x^{-(n+1)} = 2(-1)^{n+2} n! x^{-(n+1)}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

(2,0 val.) **Problema 5** Considere a equação $2x-5=\arctan x$.

(a) Mostre que esta equação tem pelo menos uma solução. Sugestão: pode ajudar esboçar os gráficos das funções.
(b) Mostre que esta equação tem exactamente uma solução.

Res: (a) Considerando a função $\phi(x)=\arctan x-2x+5$ (contínua em $\mathbb{R}$) trata-se de mostrar que existe pelo menos um $c\in\mathbb{R}$ tal que $\phi(c)=0$.

Como $\arctan x<\pi/2$ para todo o $x\in\mathbb{R}$, temos que considerando $b>\pi/4+5/2$ se tem que $\phi(b)<0$. Como $\phi(0)=5>0$, a conclusão segue imediatamente do Teorema de Bolzano.

(b) A função ϕ é diferenciável em $\mathbb{R}$ com derivada $\phi'(x)=\frac{1}{1+x^2}-2<-1, \forall x\in\mathbb{R}$, pelo que a função é estritamente decrescente.

(3,0 val.) **Problema 6** Seja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável em todos os pontos. A tabela seguinte representa alguns valores de f e da sua derivada:

x	2	3	4
$f(x)$	1	2	3
$f'(x)$	5	3	2

(a) Calcule a derivada da função $g(x)=3\,\mathrm{sen}(x)f(x^2-1)$ no ponto $x=2$.
(b) Assumindo que f é injectiva, calcule $(f^{-1})'(2)$.
(c) Mostre que existem pelo menos dois pontos em que $f'=1$.

Res: (a) Temos que
$$g'(x)=3\cos x f(x^2-1)+3\,\mathrm{sen}\, x f'(x^2-1)2x,$$
pelo que $g'(2)=3\cos 2 f(3)+12\,\mathrm{sen}\, 2 f'(3)=6\cos 2+36\,\mathrm{sen}\, 2$.

(b) Sendo f injectiva, admite inversa que será diferenciável em $x=2$ visto $f^{-1}(2)=3$ e f ser diferenciável em $x=3$ com $f'(3)=3\neq 0$. Pela regra da derivada da função inversa temos que
$$\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'(3)}=1/3.$$

(c) Aplicando o Teorema de Lagrange aos intervalos $[2,3]$ e $[3,4]$ temos que existem pontos $c\in]2,3[$ e $d\in]3,4[$ tais que:
$$f'(c)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=1 \text{ e } f'(d)=\frac{f(4)-f(3)}{4-3}=1.$$

(2,0 val.) **Problema 7** Representamos por $\lfloor x\rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a x. Seja $f\colon [1,+\infty[$ a função definida por:
$$f(x)=\sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor}\frac{x}{x^2+k}$$
Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Sugestão: limites enquadrados.

Res: Comecemos por notar que para $x\geqslant 1$ se tem $0\leqslant x-1\leqslant \lfloor x\rfloor\leqslant x$. Temos ainda que para $k\in\{1,\dots\lfloor x\rfloor\}$ se tem:
$$\frac{x}{x^2+\lfloor x\rfloor}\leqslant\frac{x}{x^2+k}\leqslant\frac{x}{x^2+1}.$$

Podemos então enquadrar:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - x}{x^2 + x} &\leqslant \frac{\lfloor x \rfloor x}{x^2 + \lfloor x \rfloor} = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{x}{x^2 + \lfloor x \rfloor} \\ &\leqslant f(x) \leqslant \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{\lfloor x \rfloor x}{x^2 + 1} \leqslant \frac{x^2}{x^2 + 1}.\end{aligned}$$

Pelo princípio do encaixe temos então imediatamente que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.