

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste - 8 de Novembro de 2014 - 12h00m (Versão 1)

Cursos: LMAC, MEBiom, MEFT, LEMat, LEAN, MEQ, MEAmbi, MEBiol

(2,0 val.) **Problema 1** Considere a função $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x+1) + \sqrt{2-x^2}$.

- (a) Mostre que o domínio de f é o conjunto $D_f =]-1, \sqrt{2}]$.
(b) Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de D_f e de $D_f \cap \mathbb{Q}$.

(3,5 val.) **Problema 2** Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x^2 - 1}$ (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \cos(1/x)) \operatorname{sen}(e^x)$
(c) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right)^{\ln x}$

(3,0 val.) **Problema 3** Considere a função $f:]-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida no seu domínio por:

$$f(x) = (x-1)\sqrt{\cos(\pi x^4/2)}$$

- (a) Calcule a derivada à esquerda de f no ponto $x = 1$ usando a definição de derivada.
(b) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 1$.
(c) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de f em $x = 0$.

(4,5 val.) **Problema 4** Considere a função $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - 4x + \ln(x^2)$.

- (a) Calcule os limites de f em 0 , $-\infty$ e $+\infty$.
(b) Estude a monotonia e a concavidade, determine os extremos e os pontos de inflexão e esboce o gráfico de f .
(c) Mostre por indução que, para qualquer $n \geq 2$, a derivada de ordem n de f é:

$$f^{(n)}(x) = 2(-1)^{n+1}(n-1)!x^{-n}$$

(2,0 val.) **Problema 5** Considere a equação $2x - 5 = \arctan x$.

- (a) Mostre que esta equação tem pelo menos uma solução. Sugestão: pode ajudar esboçar os gráficos das funções.
(b) Mostre que esta equação tem exactamente uma solução.

(3,0 val.) **Problema 6** Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todos os pontos. A tabela seguinte representa alguns valores de f e da sua derivada:

x	2	3	4
$f(x)$	1	2	3
$f'(x)$	5	3	2

- (a) Calcule a derivada da função $g(x) = 3 \operatorname{sen}(x)f(x^2 - 1)$ no ponto $x = 2$.
(b) Assumindo que f é injectiva, calcule $(f^{-1})'(2)$.
(c) Mostre que existem pelo menos dois pontos em que $f' = 1$.

(2,0 val.) **Problema 7** Representamos por $[x]$ o maior inteiro menor ou igual a x . Seja $f: [1, +\infty[$ a função definida por:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{[x]} \frac{x}{x^2 + k}$$

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Sugestão: limites enquadados.