

ÉPOCA DE RECURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

LMAC, MEFT, MEBIom, MEQ, MEBiol, MEAmbi, LEAN, LEMat

1º Sem. 2013/14 27/1/2014 Duração: 1h30m + 1h30m Versão B

1º TESTE

- (3,0 val.) 1. (a) Represente na forma de um intervalo ou de uma união disjunta de intervalos cada um dos conjunto seguintes:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x > |x - 8|\}, \quad B = \left\{ \log \left(3 + \frac{2}{x} \right) : x > 0 \right\}.$$

- (b) Indique, justificando, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo do conjunto:

$$C = \left\{ \frac{3}{n} + 2^{-n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- (2,0 val.) 2. Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) $\tan((x-3)e^{x+2})$; (b) $\frac{\cosh(1+x^2)}{\arctan(\sqrt{x})}$.

- (4,0 val.) 3. Calcule em $\overline{\mathbb{R}}$

(a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\text{sen}(x+2)}{x^2 + 5x + 6}$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(5x)}{\arctan(7/x)}$; (c) $\lim_{x \rightarrow 2} (\log(3-x))^{2-x}$.

- (6,0 val.) 4. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua em \mathbb{R} e definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{\arcsen(e^x)}{2}, & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\alpha}{x^2 + 1}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ representa uma constante.

- (a) Determine, justificando, o valor da constante α .
(b) Mostre que f não é diferenciável em $x = 0$.
(c) Determine os intervalos de monotonia e os extremos de f .
(d) Indique, justificando, o contradomínio de f e se tem máximo e mínimo absolutos
(e) Justifique que f restringida ao intervalo $] -\infty, 0[$ é invertível com inversa diferenciável. Determine a derivada da função inversa no ponto $f(-1)$.

- (3,0 val.) 5. Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ com $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Dada uma constante $a \in \mathbb{R}$, considere a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & \text{se } x \neq a; \\ f'(a), & \text{se } x = a. \end{cases}$$

- (a) Justifique que g é contínua em \mathbb{R} .
(b) Mostre que $g \in C^1(\mathbb{R})$.
(c) Mostre que g tem um mínimo absoluto em $x = a$.

- (2,0 val.) 6. Se $0 \leq a_i \leq 1, i \geq 1$, mostre por indução que

$$\sum_{i=1}^n a_i \leq a_1 \times \cdots \times a_n + n - 1.$$

2º TESTE

(6,5 val.) 7. (a) Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

(i) $x \sin^3(x^2) \cos(x^2)$, (ii) $\frac{x^2 + 21}{(x + 3)(x^2 + x - 6)}$, (iii) $(x^2 + 2)e^{x-3}$.

(b) Calcule

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} dx.$$

Sugestão: considere a substituição $t = \sqrt{x + 1}$.

(3,0 val.) 8. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par e diferenciável. Considere a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$F(x) = f(x/2) \cdot \int_0^{2x} f(t) dt.$$

(a) Mostre que F é uma função ímpar.

(b) Justifique que F é diferenciável e calcule a sua derivada.

(c) Sabendo que $f(0) = 1$, determine o polinómio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = 0$ da função F .

(5,0 val) 9. Determine a natureza das séries seguintes e calcule a soma de uma delas

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n)}{4^n}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{3/n} - 1)$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + 2^{-n}}{5^{n-1}}$.

(2,0 val.) 10. Determine para que valores de x a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(n + \sqrt{n})} (x + 2)^n.$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

(1,5 val.) 11. Desenvolva $f(x) = \log(5 + x)$ em série de potências de $x - 3$ indicando o maior intervalo aberto onde o referido desenvolvimento é válido.

(2,0 val.) 12. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável.

(a) Mostre que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^c f = \frac{1}{2} \int_a^b f.$$

(b) Mostre com um exemplo que pode não existir $c \in]a, b[$ com a propriedade anterior.