Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

$2^{\underline{o}}$ TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
(LEMat, LEAN, MEBiol, MEQ, MEAmbi, MEAero, LMAC, MEFT, MEBiom)
$1^{\underline{o}}$ Sem. 2013/14 06/Jan/2014 Duração: 1h30mn

RESOLUÇÃO DA VERSÃO A

1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções: (4,5 val.)

(a) $\dfrac{x\arctan(x^2)}{3(1+x^4)}$ (b) $\dfrac{5}{(x^2+1)(x-3)}$ (c) $\dfrac{\log(2x)}{x^4}$

Res:
(a)

$$\int \frac{x\arctan(x^2)}{3(1+x^4)}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{2x\arctan(x^2)}{(1+x^4)}\,dx = \frac{1}{6}\frac{\arctan^2(x^2)}{2} = \frac{\arctan^2(x^2)}{12}.$$

(b) Decompondo em funções racionais simples:

$$\frac{5}{(x^2+1)(x-3)} = \frac{Ax+b}{x^2+1} + \frac{C}{x-3},$$

para $A=-1/2$, $B=-3/2$, $C=1/2$. Então,

$$\begin{aligned}\int \frac{5}{(x^2+1)(x-3)}\,dx &= -\frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-3} \\ &= \frac{1}{4}\log(x^2+1) - \frac{3}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\log|x-3|.\end{aligned}$$

(c) Primitivando por partes, temos que:

$$\int \frac{\log(2x)}{x^4} = -\frac{\log(2x)}{3x^3} + \int \frac{1}{3x^4} = -\frac{\log(2x)}{3x^3} - \frac{1}{9x^3}.$$

2. Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas: (1,5 val.)

$$y = x^2 + \tfrac{1}{2}, \quad y = 2x - \tfrac{1}{2}, \quad y = -2x - \tfrac{1}{2}.$$

Res: Trata-se da área delimitada pelas duas funções pares $y = x^2 + \frac{1}{2}$ e $y = 2|x| - \frac{1}{2}$. Para $x > 0$ a intersecção das duas curvas é a única solução da equação $x^2 - 2x + 1 = 0$, isto é verifica-se em $x = 1$. Atendendo à paridade das funções cujos gráficos delimitam a região, temos então que a área $A(D)$ é dada por:

$$\begin{aligned}A(D) &= 2\int_0^1 [(x^2+\frac{1}{2}) - (2x-\frac{1}{2})]\,dx = 2\int_0^1 (x^2-2x+1)\,dx \\ &= 2(\frac{x^3}{3} - x^2 + x)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

3. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função positiva e contínua. Seja $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por: (3,0 val.)

$$\phi(x) = (x+1)\int_{-1}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t\,.$$

(a) Mostre que $\phi(x) \geq 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Res: A função ϕ anula-se em $x = -1$. Para $x > -1$ a função é positiva por ser o produto de duas funções positivas (sendo f positiva por hipótese, então pela monotonia do integral $\int_{-1}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t > 0$ para $x > -1$). Para $x < -1$, como

$$\int_{-1}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_{x}^{-1} f(t)\ \mathrm{d}t < 0,$$

a função ϕ é positiva por ser o produto de duas funções negativas.

(b) Justifique que ϕ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule ϕ'.

Res: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo a função integral indefinido de uma função contínua é diferenciável e é uma primitiva da função integranda. Portanto, ϕ é diferenciável por ser o produto de duas funções diferenciáveis e tem-se que:

$$\phi'(x) = (x+1)f(x) + \int_{-1}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

(c) Determine o polinómio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = -1$ da função ϕ.

Res:
O polinómio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = -1$ da função ϕ corresponde à recta tangente ao gráfico de ϕ no ponto $x = -1$. Como $\phi(-1) = \phi'(-1) = 0$ temos que a recta tangente ao gráfico de ϕ no ponto $x = -1$ é a recta de equação $y = 0$. Logo, o polinómio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = -1$ da função ϕ é identicamente zero.

(4,5 val.) **4.** Determine a natureza das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n/2}}{3+2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+\log n}{\cos n + n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)3^n}{n!}$

Res:

(a) Por comparação com uma série geométrica com razão em módulo menor que um, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n/2}}{3+2^n}$ é absolutamente convergente. De facto, temos que:

$$0 \leq \frac{2^{n/2}}{3+2^n} \leq \frac{2^{n/2}}{2^n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

(b) Por comparação com a série de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ (convergente, já que $3/2 > 1$), uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}+\log n}{\cos n+n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = 1 \neq 0, +\infty,$$

concluímos que a série é absolutamente convergente.

(c) Pelo critério da razão, como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+3)3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+2)3^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3(n+3)}{(n+2)(n+1)} = 0 < 1,$$

concluímos que a série é absolutamente convergente.

5. Considere a função f definida pela série de potências: (3,5 val)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x+1)^n}{3^n(n+1)}$$

(a) Determine para que valores de x a série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

Res: Fazendo $y = 2x+1$, o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n y^n}{3^n(n+1)}$ é dado por

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{3^n(n+1)}}{\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+2)}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}(n+2)}{3^n(n+1)} = 3.$$

Logo, a série converge absolutamente para $|y| < 3 \Leftrightarrow |2x+1| < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 1$ e diverge para $|2x+1| > 3 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 1$.

Se $x = -2$ obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-3)^n}{3^n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

que é divergente (por comparação com a série harmónica).

Se $x = 1$ obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{3^n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

que é convergente, pelo critério de Leibniz ($1/(n+1) \to 0$ e é decrescente). Como a respectiva série dos módulos diverge, a convergência é simples.

(b) Seja $g(x)$ a derivada de $(2x+1)f(x)$. Escreva g como um quociente de polinómios.

Res: Para $x \in]-2, 1[$, podemos derivar a série termo a termo e

$$g(x) = ((2x+1)f(x))' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x+1)^{n+1}}{3^n(n+1)} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x+1)^n}{3^n}$$

que é uma série geométrica de razão $-(2x+1)/3$. Assim,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-(2x+1)/3)^n = \frac{-(2x+1)/3}{1+(2x+1)/3} = -\frac{2x+1}{2x+4}, \quad x \in]-2, 1[.$$

6. Escreva a função $f(x) = x/(2 + 3x)$ como uma série de potências de x e indique o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. (1,5 val.)

Res:

$$f(x) = \frac{x}{2+3x} = \frac{x}{2}\,\frac{1}{1-(-3x/2)} = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-3x/2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n x^{n+1}}{2^{n+1}},$$

para $|-3x/2| < 1 \Leftrightarrow -2/3 < x < 2/3$, ou seja, $x \in \,]-2/3, 2/3[$.

(1,5 val.) **7.** Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva. Assumindo que existe uma sucessão $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \sup_{x\in[n,n+1]} f(x) \le c_n \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 c_n = \ell,\ \ell \in \mathbb{R}^+,$$

mostre que o seguinte limite existe em $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Res: Seja $F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (note-se que como f é contínua em $\mathbb{R}$, é integrável em qualquer intervalo). Como $f > 0$, temos que se $y > x$ então $F(y) > F(x)$. Ou seja, F é crescente, logo tem limite em $\overline{\mathbb{R}}$. Para ver que o limite existe em $\mathbb{R}$, é suficiente mostrar que F é majorada. Como $F(x) \le F(n)$ se $x \le n$, basta-nos mostrar que a sucessão $F(n)$, $n \in \mathbb{N}$, é majorada.

Pela aditividade do integral em relação à região de integração,

$$F(n) = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Por hipótese, $0 \le f(x) \le c_k$, para $x \in [k, k+1]$, logo

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \le c_k(k+1-k) = c_k \;\Rightarrow\; F(n) \le \sum_{k=1}^{n-1} c_k.$$

Do critério de comparação, e de

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{\frac{1}{n^2}} = \ell,\ \ell \in \mathbb{R}^+,$$

concluímos que as séries $\sum c_n$ e $\sum \frac{1}{n^2}$ têm a mesma natureza, logo $\sum c_n$ é convergente. Assim, a sucessão $F(n)$, $n \in \mathbb{N}$, é majorada pela soma finita da série $\sum c_n$.