

1º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão B
LMAC, MEFT, MEBIom, MEQ, MEBiol, MEAmbi, LEAN, LEMat

1º Sem. 2013/14 09/11/2013 Duração: 1h30m

1. (2,0 val.)

(i) Seja $A \subset \mathbb{R}$ o conjunto solução da seguinte desigualdade:

$$\frac{\log(x+3)}{5-x^2} \geq 0.$$

Mostre que $A =]-3, -\sqrt{5}[\cup [-2, \sqrt{5}[$.

(ii) Indique, caso existam em \mathbb{R} , ou justifique que não existem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $A \cap [0, +\infty[$.

2. (2,0 val.) Use o método de indução para mostrar que $(n+1)! > 3^n/2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. (2,0 val) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$\frac{\cos(1/x)}{3+\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad \arcsen(x^{5/2}).$$

4. (3,0 val.) Calcule os seguintes limites (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(1/x) \cdot (1 + \cos(e^x)) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{\sin(x/2)}}.$$

5. (4,0 val.) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 2 \arctan(x-1)$. Esboce o seu gráfico.

6. (5,5 val.) Considere a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-2x}}{x}, \quad x \neq 0, \quad \text{e} \quad g(0) = 3.$$

(i) Mostre que g é contínua em $x = 0$.

(ii) Mostre que g é diferenciável em $x = 0$ e $g'(0) = -3/2$.

(iii) Seja $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $h'(3) = 2/3$. Determine $(h \circ g)'(0)$.

(iv) Mostre que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(v) Prove que g tem mínimo absoluto.

7. (1,5 val.)

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente e majorada. Prove que existe e é finito o limite de f quando $x \rightarrow +\infty$. Sugestão: comece por usar o Axioma do Supremo.