Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão A
LMAC, MEFT, MEBIom, MEQ, MEBiol, MEAmbi, LEAN, LEMat
1º Sem. 2013/14 09/11/2013 Duração: 1h30m
RESOLUÇÃO

---

1. (2,0 val.)

(i) Seja $A \subset \mathbb{R}$ o conjunto solução da seguinte desigualdade:

$$\frac{\log(x+2)}{3-x^2} \geq 0\,.$$

Mostre que $A = \left]-2,-\sqrt{3}\right[\cup \left[-1,\sqrt{3}\right[$.

Res:

$$\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{R} : \log(x+2) \geq 0 \wedge 3-x^2 > 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \log(x+2) \leq 0 \wedge 3-x^2 < 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x+2 \geq 1 \wedge x^2 < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 0 < x+2 \leq 1 \wedge x^2 > 3\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \wedge -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\} \cup \\
&\quad \{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq -1 \wedge (x > \sqrt{3} \vee x < -\sqrt{3})\} \\
&= \Big]-2,-\sqrt{3}\Big[\cup \Big[-1,\sqrt{3}\Big[\,.
\end{aligned}$$

(ii) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, ou justifique que não existem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $A \cap [0,+\infty[$.

Res: $A \cap [0,+\infty[\;=\; \left[0,\sqrt{3}\right[$. Logo: $\sup A = \sqrt{3} \notin A$, logo A não tem máximo, $\inf A = \min A = 0$.

2. (2.0 val.) Use o método de indução para mostrar que

$$(n+2)! > 4^n\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Res: Para $n = 1$ a desigualdade verifica-se visto que $3! = 6 > 4$. Supondo agora que para um dado $k \in \mathbb{N}$ se tem $(k+2)! > 4^k$ (hipótese de indução) temos então que mostrar que $(k+3)! > 4^{k+1}$.
Atendendo à definição de factorial, à hipótese de indução e a $(k+3) \geq 4$ para $k \in \mathbb{N}$, temos que:

$$(k+3)! = (k+3)(k+2)! > (k+3)4^k \geq 4.4^k = 4^{k+1}.$$

3. (2.0 val) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$\frac{\cos(1/x)}{5+\sqrt{x}} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{arcsen}(x^{\frac{3}{2}})\,.$$

Res:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\cos(1/x)}{5+\sqrt{x}}\right)' &= \frac{\cos(1/x)'(5+\sqrt{x}) - \cos(1/x)(5+\sqrt{x})'}{(5+\sqrt{x})^2} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(1/x).(1/x^2).(5+\sqrt{x}) - \cos(1/x).(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(5+\sqrt{x})^2}.
\end{aligned}$$

$$\left(\operatorname{arcsen}(x^{\frac{3}{2}})\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^{3/2})^2}}(x^{3/2})'$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-(x^{3/2})^2}}.\frac{3}{2}.x^{1/2} = \frac{3x^{1/2}}{2\sqrt{1-x^3}}.$$

4. (3.0 val.) Calcule os seguintes limites (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim_{x\to+\infty}(1-\cos(1/x))\cdot(1+\operatorname{sen}(e^x)) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}}.$$

Res: Como $0 \le 1+\operatorname{sen}(e^x) \le 2$, temos que:

$$0 \le (1-\cos(1/x))\cdot(1+\operatorname{sen}(e^x)) \le 2(1-\cos(1/x)).$$

Atendendo a que $\lim_{x\to+\infty} 1-\cos(1/x) = 0$, pelo princípio do encaixe temos imediatamente que

$$\lim_{x\to+\infty}(1-\cos(1/x))\cdot(1+\operatorname{sen}(e^x)) = 0.$$

Quanto ao segundo limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(1-\frac{x}{2})}{\operatorname{sen}(2x)}}$$
$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-\frac{x}{2})}{\operatorname{sen}(2x)}}.$$

Pela Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-\frac{x}{2})}{\operatorname{sen}(2x)} = (\frac{0}{0}) = \lim_{x\to 0}\frac{(\log(1-\frac{x}{2}))'}{(\operatorname{sen}(2x))'} = -\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(2-x)\cos(2x)} = -\frac{1}{4},$$

pelo que

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}} = e^{-\frac{1}{4}}.$$

5. (4.0 val.) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2\arctan(x-1)-x$ Esboce o seu gráfico.

Res: Verifica-se fácilmente que se trata de uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$ com primeira e segunda derivadas dadas por:

$$f'(x) = \frac{2}{1+(x-1)^2}-1, \quad f''(x) = \frac{4(1-x)}{(1+(x-1)^2)^2}.$$

A primeira derivada anula-se se

$$\frac{2}{1+(x-1)^2} = 1 \Leftrightarrow 1+(x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x-1 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

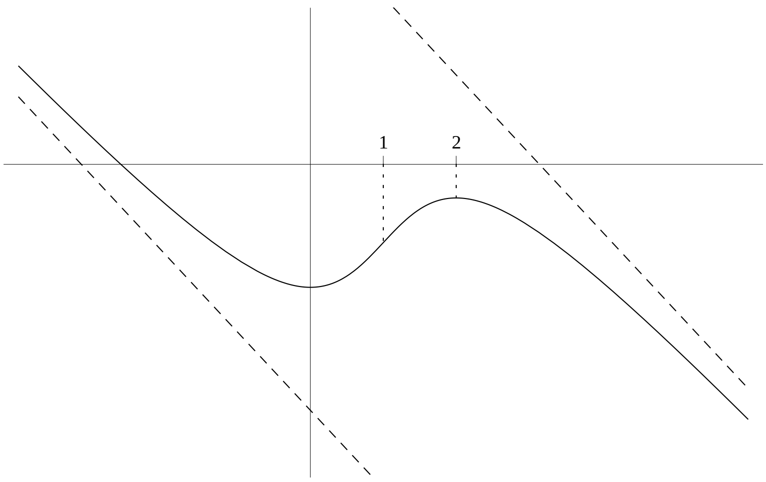
Ou seja, $x = 0$ e $x = 1$ são pontos críticos.

Temos
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + (x-1)^2 < 2 \Leftrightarrow x \in]0, 2[$$
pelo que f é estritamente crescente em $]0, 2[$, e $f'(x) < 0$ para $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, pelo que f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]2, +\infty[$. Concluímos imediatamente que $x = 0$ é um ponto de mínimo local para f, $f(0) = -\frac{\pi}{4}$, e $x = 2$ é um ponto de máximo local, $f(2) = \frac{\pi}{2} - 2$.

Quanto à concavidade, temos que $f''(x) > 0$ para $x \in]-\infty, 1[$ (a função é convexa) e $f''(x) < 0$ para $x \in]1, +\infty[$ (a função é côncava). O ponto $x = 1$ é portanto um ponto de inflexão.

Como
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2\arctan(x-1) - x}{x} = -1,$$
e
$$\lim_{x \to \pm\infty} 2\arctan(x-1) = \pm\pi,$$
concluímos que a recta de equação $y = -x + \pi$ é uma assímptota ao gráfico de f à direita e que a recta de equação $y = -x - \pi$ é uma assímptota ao gráfico de f à esquerda.

Com base em toda esta informação, pode-se esboçar o gráfico de f:



6. (6.0 val.) Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$g(x) = \frac{e^{2x} - e^{-x}}{x}, \ x \neq 0, \quad \text{e} \quad g(0) = 3.$$

(i) Mostre que g é contínua em $x = 0$.

Res: Como, por aplicação da Regra de Cauchy, se tem
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{x} = \lim_{x \to 0} (2e^{2x} + e^{-x}) = 3 = g(0),$$
a função é contínua em $x = 0$.

(ii) Mostre que g é diferenciável em $x = 0$ e $g'(0) = 3/2$.

Res: Por definição de derivada e por aplicação sucessiva da regra de Cauchy temos que:

$$\begin{aligned} g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-x} - 3x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x} + e^{-x} - 3}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{4e^{2x} - e^{-x}}{2} = 3/2. \end{aligned}$$

(iii) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $h'(3) = -2/3$. Determine $(h \circ g)'(0)$.

Res: Sendo h diferenciável em $\mathbb{R}$ e g diferenciável em 0 temos que $h \circ g$ é diferenciável em $x = 0$ e pela regra da derivada da função composta:

$$(h \circ g)'(0) = h'(g(0))g'(0) = h'(3)g'(0) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1.$$

(iv) Mostre que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} g(x)$.

Por aplicação da Regra de Cauchy temos que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (2e^{2x} + e^{-x}) = +\infty.$$

(v) Prove que g tem mínimo absoluto.

Res: Dado $M > 0$, atendendo à alínea anterior podemos concluir que existem $a < 0 < b$ tais que $g(x) > M \quad \forall x \in]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$. Escolhendo, por exemplo, $M = g(0) = 3$, temos então que $g(x) > 3 \ \ \forall x \in]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$. Por outro lado, como g é contínua em $[a, b]$, intervalo limitado e fechado, pelo Teorema de Weierstrass sabemos que g tem mínimo em $[a, b]$. Designando por m o valor desse mínimo e tendo em conta que $0 \in [a, b]$, temos que $m \leq g(0) = 3$. Podemos assim concluir que m é o mínimo absoluto de g.

7. (1.5 val.)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e majorada. Prove que existe e é finito o limite de f quando $x \to +\infty$.

<u>Sugestão</u>: comece por usar o Axioma do Supremo.

Res: Sabemos que $f(\mathbb{R})$ é não vazio e por hipótese é majorado. Logo tem supremo. Vamos ver que a função converge para $s = \sup f(\mathbb{R})$. Por ser $s = \sup f(\mathbb{R})$, sabemos que dado $\epsilon > 0$, existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) > s - \epsilon$. Como f é crescente, sabemos ainda que para $x > x_1$ se tem $f(x) \geq f(x_1) > s - \epsilon$. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $x_1 \in \mathbb{R} : x > x_1 \Rightarrow s - \epsilon < f(x) \leq s$ (esta ultima desigualdade é válida porque s é um majorante de $f(\mathbb{R})$). Está então provado que a função converge para s.