

ÉPOCA DE RECURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

LMAC, MEFT, MEBIom, MEQ, MEBiol, MEAmbi, LEAN, LEMat, MEAero

1º Sem. 2012/13 28/1/2013 Duração: 1h30m + 1h30m Versão B

1º TESTE

1. (1,5 val.)

(a) Represente na forma de um intervalo ou de uma união disjunta de intervalos o conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x^2 + x + 1) > 0\}.$$

(b) Indique, caso existam em \mathbb{R} , o supremo, ínfimo, máximo e mínimo dos conjuntos seguintes:

$$B = \left\{ \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad C = B \cap [-1, 0[.$$

2. (1,0 val.) Recorrendo ao método de indução, mostre que

$$\frac{(n+1)!}{2^n} \geq n-1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

3. (2,0 val.) Calcule em $\overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(x^2)}{\log(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x^{\frac{1}{\sen(x)}}.$$

4. (1,0 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$(a) e^{\cosh(1+x^2)}; \quad (b) \frac{\log(1+x^3)}{\tan x}.$$

5. (3,5 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua em \mathbb{R} e definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \arctan \sqrt{x}, & \text{se } x > 0 \\ \log(2x^2 + x + 1), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- (a) Justifique que $f(0) = 0$ e verifique se f é ou não diferenciável no ponto zero.
- (b) Determine os intervalos de monotonia, os extremos e o contradomínio de f .
- (c) Verifique se existem assíntotas ao gráfico de f .
- (d) Justifique que f restringida ao intervalo $]0, +\infty[$ é invertível com inversa diferenciável. Determine a derivada da função inversa no ponto $f(1)$.

6. (1,0 val.) Seja f uma função diferenciável em \mathbb{R} com derivada crescente. Mostre que, se $a < b$ e $f(a) = f(b)$ então $f(x) \leq f(a) = f(b) \quad \forall x \in]a, b[$.

2º TESTE

7. (3.5 val.)

(a) Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

$$(i) \frac{(\log x)^{\frac{1}{5}}}{3x}, \quad (ii) \frac{3x+1}{(1-x^2)(1-x)}, \quad (iii) \frac{1}{x^3} \sinh\left(\frac{1}{x}\right).$$

(b) Calcule

$$\int_0^{\log(2)} \frac{e^x}{(3-e^x)\sqrt{2-e^x}} dx.$$

Sugestão: considere a substituição $t = \sqrt{2-e^x}$.

8. (1.0 val.) Considere a função $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$F(x) = \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{x}} \frac{\cos(t^2)}{2t} dt.$$

(a) Justifique que F é duas vezes diferenciável em \mathbb{R}^+ e calcule F' , F'' .

(b) Determine um polinómio de 2º grau $p(x)$ tal que $p^{(k)}(\frac{\pi}{2}) = F^{(k)}(\frac{\pi}{2})$, $k = 0, 1, 2$.

9. (2.0 val) Determine a natureza das séries seguintes e calcule a soma de uma delas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n! + e^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} \arcsen\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^{n+1}}.$$

10. (1.0 val.) Determine para que valores de x a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+n^2}} (3x-2)^n.$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

11. (1.0 val.) Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cuja derivada é igual a $\frac{1}{x}$ e tal que $f(2) = 1$. Desenvolva f em série de potências de $x-2$, indicando o maior intervalo aberto onde o referido desenvolvimento é válido.

12. (1.5 val.) Seja f uma função positiva e decrescente em $[1, +\infty[$, e para cada $n \in \mathbb{N}$ considere

$$A(n) = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx.$$

(a) Mostre que

$$A(n) = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} (f(k) - f(x)) dx.$$

(b) Justifique que $A(n) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e que $A(n)$ é decrescente. Conclua, justificando, que $A(n)$ é uma sucessão convergente com $0 \leq \lim A(n) < f(1)$.

(c) Aproveite o resultado da alínea anterior para mostrar que

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

existe e pertence ao intervalo $[0, 1[$.