Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LMAC, MEFT, MEBIom, MEQ, MEBiol, MEAmbi, LEAN, LEMat, MEAero

1º Sem. 2012/13 7/1/2013 Duração: 1h30m <u>Versão A</u>

---

1. (7.0 val.)

(a) Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

$$\text{(i) } 10x(1+x^2)^9\,, \qquad \text{(ii) } \frac{6x^2-x+1}{(1+3x^2)(1+x)}\,, \qquad \text{(iii) } \frac{1}{\sqrt{x-5}}\operatorname{arcsen}\sqrt{x-5}.$$

Resolução. (i) (1.0 val) É uma primitiva (quase) imediata:

$$\int 10x(1+x^2)^9\,dx = \frac{1}{2}\int 10(x^2)'(1+x^2)^9\,dx = \frac{1}{2}(1+x^2)^{10}.$$

(ii) (2.0 val) É uma primitiva de uma função racional. Usamos a decomposição em fracções simples dada por

$$\frac{6x^2-x+1}{(1+3x^2)(1+x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1+3x^2}$$

Temos

$$6x^2-x+1 = A(1+3x^2)+Bx(1+x)+C(1+x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Para calcular as constantes A, B, C fazemos, por exemplo,

$$\begin{aligned} x=-1 &\ \Rightarrow\ 6+1+1=4A \ \Rightarrow\ A=2 \\ x=0 &\ \Rightarrow\ 1=A+C \ \Rightarrow\ C=-1 \\ \text{coef. } x^2 &\ \Rightarrow\ B+3A=6 \ \Rightarrow\ B=0. \end{aligned}$$

Temos então:

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2-x+1}{(1+3x^2)(1+x)}\,dx &= \int \frac{2}{1+x} - \frac{1}{1+3x^2}\,dx \\ &= 2\log|1+x| - \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3}x)^2}\,dx \\ &= 2\log|1+x| - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(\sqrt{3}x). \end{aligned}$$

(iii) (2.0 val) Primitivando por partes com $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}} = (x-5)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow u(x) = 2(x-5)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x-5}$ e $v(x) = \operatorname{arcsen}\sqrt{x-5}$, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x-5}}\operatorname{arcsen}\sqrt{x-5}\,dx &= 2\sqrt{x-5}\operatorname{arcsen}\sqrt{x-5} - \int 2\sqrt{x-5}\,\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-5}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x-5})^2}}\,dx \\ &= 2\sqrt{x-5}\operatorname{arcsen}\sqrt{x-5} + \int \frac{-1}{\sqrt{6-x}}\,dx \\ &= 2\sqrt{x-5}\operatorname{arcsen}\sqrt{x-5} + 2\sqrt{6-x}. \end{aligned}$$

□

(b) Calcule

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\, dx.$$

Sugestão: considere a substituição $x = 2(\operatorname{sen}(t))^2$.

Resolução. (2.0 val) Fazendo $x = 2(\operatorname{sen}(t))^2$, $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (ou seja, $t = \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{x}{2}}$), temos

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 t = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}.$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 t = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3},$$

e $\frac{dx}{dt} = 4 \operatorname{sen} t \cos t$. O integral pedido fica

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\, dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4 \operatorname{sen} t \cos t}{\sqrt{2\operatorname{sen}^2(t)(2 - 2\operatorname{sen}^2(t))}}\, dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4 \operatorname{sen} t \cos t}{\sqrt{4\operatorname{sen}^2(t)\cos^2(t)}}\, dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\, dt = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

□

2. (1.5 val.) Determine a área da região $A \subset \mathbb{R}^2$ dada por:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2 - x^2\}.$$

Resolução. É a área da região compreendida entre a recta $y = x$ e a parábola $y = 2 - x^2$. Os pontos de interseção são

$$x = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1.$$

A área pedida é dada pelo integral:

$$A = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - (-4 + \frac{8}{3} - 2) = \frac{9}{2}.$$

□

3. (1.5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}$. Considere a função $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\Phi(x) = \int_0^{x^2} x f(3t)\, dt.$$

Justifique que Φ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule Φ'.

Resolução. Temos que

$$\Phi(x) = \int_0^{x^2} xf(3t)\, dt = x \int_0^{x^2} f(3t)\, dt.$$

Escrevendo

$$\int_0^{x^2} f(3t)\, dt = F(x^2), \quad F(y) = \int_0^y f(3t)\, dt$$

temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que F é diferenciável em $\mathbb{R}$, já que $f(3t)$ é contínua em $\mathbb{R}$, com $F'(y) = f(3y)$. Logo, $\Phi(x) = xF(x^2)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ porque é dada pelo produto e composição de funções diferenciáveis.

A derivada vem:

$$\Phi'(x) = 1 \cdot \int_0^{x^2} f(3t)\, dt \; + \; x \cdot (x^2)' f(3x^2) = \int_0^{x^2} f(3t)\, dt \; + \; 2x^2 f(3x^2).$$

□

4. (4.0 val) Determine a natureza das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n^2+4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{3^{n+1}}.$$

Resolução. (i) (1.5 val) Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n^2+4}$ é uma série de termos não-negativos podemos usar o critério da comparação. Considerando a série de Dirichlet (convergente) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+3}}{n^2+4}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}\sqrt{n+3}}{n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^3(n+3)}{(n^2+4)^2}} = 1,$$

pelo que as séries são da mesma natureza. Concluímos portanto que a série dada é absolutamente convergente.

(ii) (1.5 val.) Como é uma série de termos não negativos podemos usar o critério da razão. Temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)e^{-(n+1)^2}}{ne^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) e^{-((n+1)^2+n^2)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) e^{-(2n+1)} = 0.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$, concluímos que a série é absolutamente convergente.

(iii) (1,0 val) Para n par (isto é $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$) temos que

$$a_{2k} = \frac{\left(2+(-1)^{2k}\right)^{2k}}{3^{2k+1}} = \frac{3^{2k}}{3^{2k+1}} = \frac{1}{3}.$$

Logo, o termo geral da série não converge para zero e concluímos pelo critério geral de convergência que a série é divergente.

□

5. (5.0 val.)

(a) Determine para que valores de x a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}(x-2)^n.$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

(b) Denotando por f a função dada pela série acima no seu domínio de convergência absoluta, escreva f' como série de potências de $x-2$ e aproveite o desenvolvimento obtido para mostrar que $f'(x) = \dfrac{1}{5-x}$.

(c) Determine $f(1)$.

Resolução. (a) (2.0 val) A série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n3^n}(x-2)^n$ será absolutamente convergente em $]2-R, 2+R[$ e divergente em $\mathbb{R}\backslash[2-R, 2+R]$ onde $R \in \overline{\mathbb{R}}$ (raio de convergência) é dado pelo limite seguinte:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n3^n}}{\dfrac{1}{(n+1)3^{n+1}}} = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = 3.$$

Isto é, a série é absolutamente convergente em $]-1, 5[$ e divergente em $]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[$. Temos agora que estudar o que se passa em $x=-1$ e $x=5$. Em $x=5$ temos a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

(série harmónica) que é divergente. Em $x=-1$ temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

(série harmónica alternada) que não é absolutamente convergente pelo que foi dito atrás mas é simplesmente convergente pelo critério de Leibnitz visto $\frac{1}{n}$ ser uma sucessão decrescente e convergente para zero.

(b) (2.0 val.) Sabemos que uma função dada pela soma de uma série de potências de $x-a$ é diferenciável em $]a-R, a+R[$ e a sua derivada é obtida diferenciando a série termo a termo. Sendo assim, f é diferenciável em $]-1, 5[$ e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} n(x-2)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{3}\right)^{n-1},$$

que é uma série geométrica convergente para $\frac{|x-2|}{3} < 1$, isto é para $x \in]-1, 5[$ com soma dada por:

$$f'(x) = \frac{1/3}{1-\frac{(x-2)}{3}} = \frac{1}{5-x}.$$

(c) (1.0 val) Como $f'(x) = \frac{1}{5-x}$ sabemos que $f(x)$ e $-\log|5-x|$ (uma primitiva de $\frac{1}{5-x}$) diferem de uma constante. Isto é,

$$\log|5-x| = -f(x) + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n3^n}(x-2)^n + C,$$

para algum $C \in \mathbb{R}$. Ou seja, a função $g(x) = \log|5-x|$ admite um desenvolvimento em série de potências de $x-2$ para $x \in]-1,5[$. Este desenvolvimento é único (série de Taylor em $x=2$) pelo que

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n3^n}(x-2)^n + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n,$$

e concluímos que $C = g(2) = \log|5-2| = \log 3$. Portanto

$$f(x) = -\log|5-x| + C = -\log|5-x| + \log 3$$

e $f(1) = -\log 4 + \log 3 = \log \frac{3}{4}$.

$\square$

6. (1.0 val.) Seja $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ uma função que verifica:

$$\exists M > 0 : |f^{(n)}(x)| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que em todo o seu domínio f é dada pela sua série de Taylor no ponto zero.
Sugestão: use a fórmula de Taylor.

Resolução. Como $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ podemos usar a fórmula de Taylor para qualquer $n \in \mathbb{N}$ obtendo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k + R_{n,0}(x),$$

onde o resto de ordem n no ponto zero é dado por:

$$R_{n,0}(x) = \int_0^x \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n\, dt.$$

Utilizando a hipótese sobre as derivadas da função podemos dizer que:

$$\begin{aligned} |R_{n,0}(x)| &= \left| \int_0^x \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n\, dt \right| \\ &\leq \frac{M}{n!}\left| \int_0^x (x-t)^n\, dt \right| = \frac{M}{(n)!}\left| \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} \right|_{t=0}^{t=x} \\ &= \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$ fixo, temos então que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$. Passando agora ao limite quando $n \to \infty$ na fórmula de Taylor temos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k + R_{n,0}(x) \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k, \end{aligned}$$

onde no último passo usámos a definição de soma de uma série convergente. Concluímos então que para todo o $x \in \mathbb{R}$ a função é dada pela sua série de Taylor no ponto zero. $\square$