Instituto Superior Técnico
Departamento de Matematica

TESTES DE RECUPERAÇÃO DE CDI-1 I

$1^{\underline{O}}$ SEM. 2010/11 DURAÇÃO: 1H30/3H00 VERSÃO B

LEMAT, LEAN, MEBIOL, MEQ, MEAMBI E LMAC, MEBIOM, MEFT

1. (1,5 val.)
(a) Represente na forma de um intervalo ou de uma união disjunta de intervalos os conjuntos seguintes:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |\arctan x| < 1\} \quad \text{e} \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \log|x^2 - 4| - \log|x+2| \geq 1\right\}.$$

(b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo dos conjuntos seguintes:

$$C = \left\{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right), \ n \in \mathbb{N}\right\}, \quad D = [-2, 1[\quad \text{e} \quad C \cap D.$$

2. (2,0 val.) Calcule:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x - \pi)}{2x}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(\log 3x)}{\log(x^2)}, \quad \lim_{x \to 0^+} (\tan x)^{\tan x}.$$

3. (1,5 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$a)\ e^{\operatorname{sen}(x^2)}; \qquad b)\ \frac{\arctan(\cosh(x/2))}{\sqrt{x}}.$$

4. (1,0 val.) Se $0 \leq a_i \leq 1, \ i \geq 1$, mostre por indução que:

$$(1 - a_1) \times \cdots \times (1 - a_n) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

5. (3,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ e definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}(1 - x^2) & \text{se } |x| \leq 1 \\ \log(2x^2 - c) & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

onde $c \in]-\infty, 2[$ designa uma constante.
(a) Determine o valor de c.
(b) Mostre que f não é diferenciável em $x = 0$.
(c) Determine os intervalos de monotonia e os extremos de f.

6. (1,0 val.) Seja g uma função definida e diferenciável em $]0, 1[$ e tal que:

$$g\left(\frac{1}{n+2}\right) = g\left(\frac{1}{n+1}\right) + 1.$$

(a) Justifique que g não pode ser prolongada por continuidade ao ponto 0.
(b) Mostre que existe uma sucessão c_n de termos em $]0, 1[$ que verifica:

$$g'(c_n) = -(n+1)(n+2).$$

<u>O TESTE 1 ACABA AQUI.</u>

7. (2,5 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $e^x\sqrt{3-2e^x}$ (b) $x^2 \arctan x$ (c) $\dfrac{3x}{(x-1)(x^2+2)}$

8. (1,0 val.) Calcule

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

e aproveite o resultado para justificar que a área do círculo unitário é igual a π.
Sugestão: faça a mudança de variável $x = \operatorname{sen} t$. Poderá ser-lhe útil a fórmula $(\cos t)^2 = \frac{1+\cos(2t)}{2}$.

9. (2,0 val.) Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\phi(x) = \int_0^{x^2} e^{t^3}\, dt\,.$$

a) Justifique que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e calcule ϕ'.

b) Obtenha o desenvolvimento de ϕ em série de Taylor em torno de $x = 0$ indicando o respectivo intervalo de convergência.

10. (2,0 val.)

(a) Determine a natureza das séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{2^n n^2} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n)}{n^3+2n}\,.$$

(b) Justifique que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+n^2}$$

é convergente e que a sua soma é menor que 2.

11. (1,5 val) Determine para que valores de x a série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{3^n(\sqrt{n}+1)}$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

12. (1,0 val.) Seja f uma função estritamente crescente em $[1,+\infty[$.

(a) Mostre que

$$f(1)+\cdots+f(n-1) < \int_1^n f(x)\,dx < f(2)+\cdots+f(n),\ \forall\, n>1\,.$$

(b) Escolhendo $f = \log$ mostre que

$$(n-1)! < \frac{n^n}{e^{n-1}} < n!\,.$$