

2º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I  
(LMAC, MEBiom e MEFT)

1º Sem. 2010/11    15/Jan/2011 - v.2    Duração: 1h30mn

1. (6,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a)  $x^2 \operatorname{sen}(x)$

(b)  $\frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 2x^2 + x}$

(c)  $\frac{1}{2 - \cos(x)}$  (considere a mudança de variável  $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  e use a relação trigonométrica  $\cos(x) = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$ )

2. (1,5 val.) Determine a área da região plana  $A \subset \mathbb{R}^2$  definida por:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x + 2\}$$

3. (1,5 val.) Determine uma função contínua  $g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$x^3 + \frac{x^4}{4} = \int_0^{x^2} \frac{\sqrt{t}}{2} e^{g(\sqrt{t})} dt, \quad \forall x \in [0, +\infty[.$$

4. (1,0 val.) Seja  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Sendo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável não negativa, mostre que existe  $c \in ]a, b[$  tal que

$$\int_a^b g(x)f(x) dx = g(c) \int_a^b f(x) dx$$

5. (2,0 val.) Mostre que a seguinte série numérica é convergente e calcule a sua soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n-1}}$$

6. (3,0 val.) Determine se cada uma das seguintes séries numéricas é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente:

$$(i) \quad \sum \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{3n} + 1)(2n - 1)} ; \quad (ii) \quad \sum \frac{\text{sen}(n\pi/3)}{n^2} .$$

7. (2,0 val.) Determine o conjunto dos pontos  $x \in \mathbb{R}$  onde a seguinte série é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente:

$$\sum \frac{(3x - 2)^n}{n + 2^n}$$

8. (2,0 val.) Desenvolva a função  $f : ]-\infty, 3[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{3-t} dt, \quad \forall x \in ]-\infty, 3[ ,$$

em séries de potências de  $x$ . Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

9. (1,0 val.) Se a série numérica de termos positivos  $\sum a_n$  for convergente, o que pode concluir quanto à natureza da série  $\sum \log(1 + a_n)$ ?