Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$2^{\underline{o}}$ TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I (LMAC, MEBiom e MEFT)

$1^{\underline{o}}$ Sem. 2010/11 15/Jan/2011 - v.1 Duração: 1h30mn

RESOLUÇÃO

1. (6,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $x^2 \cos(x)$

(b) $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x}$

(c) $\dfrac{1}{3-\cos(x)}$ (considere a mudança de variável $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ e use a relação trigonométrica $\cos(x) = \dfrac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$)

Resolução.

(a) Usando primitivação por partes:

$$\begin{aligned}\int x^2\cos(x) &= x^2\operatorname{sen}(x) - \int 2x\operatorname{sen}(x)\\ &= x^2\operatorname{sen}(x) - 2\left(-x\cos(x) + \int \cos(x)\right)\\ &= x^2\operatorname{sen}(x) + 2x\cos(x) - 2\operatorname{sen}(x)\end{aligned}$$

(b) Decompomos a função racional:

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x} = \frac{3x^2+2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Os coeficientes A, B e C são determinados por forma a que

$$A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx = 3x^2+2x+1\,,$$

pelo que

$$\begin{aligned}x=0 &\Rightarrow A=1\\ x=-1 &\Rightarrow -C = 3-2+1 = 2 \Rightarrow C=-2\\ x=1 &\Rightarrow 4A+2B+C = 3+2+1 = 6 \Rightarrow 2B=4 \Rightarrow B=2\end{aligned}$$

Logo

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x} = \int \frac{1}{x} + 2\int \frac{1}{x+1} - 2\int \frac{1}{(x+1)^2}$$
$$= \log|x| + 2\log|x+1| + \frac{2}{x+1}$$

(c) Usando a mudança de variável indicada, temos que

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2\arctan(u) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

Logo, usando também a relação trigonométrica indicada,

$$\int \frac{1}{3-\cos(x)}\,dx = \int \frac{1}{3-\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du = \int \frac{2}{3(1+u^2)-(1-u^2)}\,du$$
$$= \int \frac{2}{2+4u^2}\,du = \int \frac{1}{1+2u^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}u)^2}\,du$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

□

2. (1,5 val.) Determine a área da região plana $A \subset \mathbb{R}^2$ definida por:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 < y < -x+2\right\}$$

Resolução. A área solicitada é dada por

$$\text{área}\,(A) = \int_a^b [(-x+2)-x^2]\,dx$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ soluções de

$$x^2 = -x+2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)=0$$

Assim,

$$\text{área}\,(A) = \int_{-2}^{1} [(-x+2)-x^2]\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1}$$
$$= \left(-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{4}{2}-4+\frac{8}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

□

3. (1,5 val.) Determine uma função contínua $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{x^3}{3} + x^4 = \int_0^{x^2} \frac{\sqrt{t}}{2} e^{f(\sqrt{t})} \, dt \, , \ \forall x \in [0, +\infty[\ .$$

Resolução. A igualdade indicada é verificada para $x = 0$, independentemente de f. Para $x > 0$ e como f é contínua, podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo para derivar a igualdade obtendo

$$x^2 + 4x^3 = \frac{x}{2} e^{f(x)} 2x \Rightarrow e^{f(x)} = 1 + 4x \Rightarrow f(x) = \log(1 + 4x)$$

Como a expressão obtida para f é contínua em $x = 0$, podemos concluir que

$$f(x) = \log(1 + 4x) \, , \ \forall x \in [0, +\infty[$$

□

4. (1,0 val.) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Sendo $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável não negativa, mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(c) \int_a^b g(x) \, dx$$

Resolução. Como f é contínua no intervalo limitado e fechado $[a, b]$, tem mínimo e máximo nesse intervalo:

$$m := \min_{[a,b]} f \quad \text{e} \quad M := \max_{[a,b]} f$$

Tendo em conta que $g \geq 0$ e usando a monotonia do integral, temos que

$$\begin{aligned} & m \leq f \leq M \\ \Rightarrow \ & mg \leq fg \leq Mg \\ \Rightarrow \ & m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g \end{aligned}$$

Se $\int_a^b g = 0$, podemos concluir destas desigualdades que $\int_a^b fg = 0$, pelo que a igualdade do enunciado é verificada para qualquer $c \in [a, b]$.

Se $\int_a^b g > 0$, podemos concluir destas desigualdades que

$$m \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M$$

e o Teorema do Valor Intermédio Aplicado à função contínua f garante que existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$$

□

5. (2,0 val.) Mostre que a seguinte série numérica é convergente e calcule a sua soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n+1}}$$

Resolução. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n+1}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{4^{n}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n}$$

temos que se trata de uma série geométrica de razão

$$\left| R = -\frac{1}{4} \right| < 1 \,,$$

logo convergente. Usando a fórmula para a soma de uma série geométrica, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n+1}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{4}}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{10}$$

□

6. (3,0 val.) Determine se cada uma das seguintes séries numéricas é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente:

$$\text{(i)} \quad \sum \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2n}+1)(3n-1)} \; ; \qquad \text{(ii)} \quad \sum \frac{\cos(n\pi/3)}{n^2} \; .$$

Resolução.

(i) Trata-se de uma série de termos não-negativos que podemos comparar com a série harmónica $\sum 1/n$ que é divergente. De facto,

$$\lim \frac{\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2n}+1)(3n-1)}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n}+1} \cdot \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

e, como $0 < \frac{1}{3\sqrt{2}} < +\infty$, podemos concluir que a série indicada tem a mesma natureza da série harmónica, logo também é divergente.

(ii) Como

$$\left| \frac{\cos(n\pi/3)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \,, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \,,$$

e $\sum 1/n^2$ é uma série convergente, concluimos por comparação que a série

$$\sum \left| \frac{\cos(n\pi/3)}{n^2} \right| \text{ é convergente,}$$

pelo que a série

$$\sum \frac{\cos(n\pi/3)}{n^2} \text{ é absolutamente convergente.}$$

$\square$

7. (2,0 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a seguinte série é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente:

$$\sum \frac{(2x-3)^n}{n+3^n}$$

Resolução. O raio de convergência desta série de potências é dado por

$$R = \lim \frac{\frac{1}{n+3^n}}{\frac{1}{(n+1)+3^{n+1}}} = \lim \frac{(n+1)+3^{n+1}}{n+3^n} = \lim \frac{\frac{n+1}{3^n}+3}{\frac{n}{3^n}+1} = 3$$

Assim, a série é absolutamente convergente quando

$$|2x-3| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x-3 < 3 \Leftrightarrow 0 < 2x < 6 \Leftrightarrow 0 < x < 3 \Leftrightarrow x \in]0,3[$$

e divergente quando

$$|2x-3| > 3 \Leftrightarrow x \in]-\infty,0[\,\cup\,]3,+\infty[$$

Quando $x = 3$ a série de potências toma a forma

$$\sum \frac{3^n}{n+3^n}$$

que é uma série numérica em que o termo geral não tende para zero ($\lim \frac{3^n}{n+3^n} = 1$), logo divergente.

Quando $x = 0$ a série de potências toma a forma

$$\sum (-1)^n \frac{3^n}{n+3^n}$$

que é novamente uma série numérica em que o termo geral não tende para zero ($\lim \frac{(-1)^n 3^n}{n+3^n}$ não existe), logo também divergente.

$\square$

8. (2,0 val.) Desenvolva a função $f :]-\infty,2[\to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^3}{2-t}\,dt \ , \ \forall x \in]-\infty,2[\ ,$$

em séries de potências de x. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

Resolução. Temos pelo Teorema Fundamental do Cálculo que

$$f'(x) = \frac{x^3}{2-x}\,,\ \forall\, x \in \,]-\infty, 2[\ .$$

Usando a série de Taylor correspondente à soma de uma série geométrica, i.e.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,,\ \forall\, x \in \,]-1, 1[\ ,$$

temos que

$$f'(x) = \frac{x^3}{2-x} = \frac{x^3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{x^3}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{2^{n+1}}\,,\ \forall\,\frac{x}{2} \in \,]-1,1[\ \Leftrightarrow x \in \,]-2,2[\ .$$

Primitivando termo a termo, obtemos

$$f(x) = c + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+4}}{(n+4)2^{n+1}}\,,\ \forall\, x \in \,]-2,2[\ ,$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. Como

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^3}{2-t}\,dt \Rightarrow f(0) = 0\,,$$

concluimos que $c = 0$ pelo que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+4}}{(n+4)2^{n+1}} = \sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^n}{n2^{n-3}}\,,\ \forall\, x \in \,]-2,2[\ ,$$

□

9. (1,0 val.) Se a série numérica de termos positivos $\sum a_n$ é convergente, o que pode concluir quanto à natureza da série $\sum \log(1+a_n)$?

Resolução. Tendo em conta que

$$\sum a_n \text{ convergente } \Rightarrow a_n \to 0\,,$$

podemos comparar as séries de termos positivos $\sum a_n$ e $\sum \log(1+a_n)$ calculando

$$\lim \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1\,.$$

Como $0 < 1 < +\infty$ concluimos que as séries são da mesma natureza, pelo que

$$\sum \log(1+a_n) \text{ é também convergente.}$$

□