Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I (LMAC, MEBiom e MEFT)

1º Sem. 2010/11 13/Nov/2010 - v.1 Duração: 1h30mn

RESOLUÇÃO

1. (3,0 val.)

a) (2,0 val.) Represente na forma de um intervalo ou de uma união disjunta de intervalos os conjuntos seguintes:

(i)
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : e^x - e^{-x} < 2\right\}$$

(ii) o domínio D da função definida pela expressão:
$$f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) .$$

Resolução.

$$\begin{aligned} A &= \left\{x \in \mathbb{R} : e^x - e^{-x} < 2\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{e^x - e^{-x}}{2} < 1\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{senh}(x) < 1\} \\ &=]-\infty, \operatorname{argsenh}(1)[\end{aligned}$$

onde se usou o facto de a função seno hiperbólico ser estritamente crescente e $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{senh}(x) = -\infty$.
Como o domínio da função logaritmo é $\mathbb{R}^+$, temos que:

$$\begin{aligned} D &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{x-1} > 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x+1 < 0 \,\wedge\, x-1 < 0) \vee (x+1 > 0 \,\wedge\, x-1 > 0)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x < -1 \,\wedge\, x < 1) \vee (x > -1 \,\wedge\, x > 1)\} \\ &=]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\end{aligned}$$

□

b) (1,0 val.) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo dos conjuntos seguintes:

$$B =]-\infty, -1[\cup [2, +\infty[\;, \quad C =]-1, 2] \quad \text{e} \quad B \cap C \,.$$

Resolução. O conjunto B não é minorado nem majorado, pelo que não tem ínfimo nem supremo, não tendo também mínimo nem máximo.

O conjunto C tem $\inf C = -1 \notin C$, pelo que não tem mínimo, e tem $\sup C = 2 \in C$, pelo que tem $\max C = 2$.

O conjunto $B \cap C = \{2\}$, pelo que

$$\inf B \cap C = \min B \cap C = 2 = \max B \cap C = \sup B \cap C\,.$$

$\square$

2. (4,0 val.) Calcule:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}((x-1)^2)}{x-1}\,, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos\left(e^{2x}+1\right)}{x^3}\,, \quad \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{x}{x-2}\right)^{x-2}\,.$$

Resolução.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}((x-1)^2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-1)\cdot \frac{\operatorname{sen}((x-1)^2)}{(x-1)^2} = 0\cdot 1 = 0\,. \quad \text{(1,0 val.)}$$

Sendo o coseno uma função limitada entre -1 e 1, temos que

$$-\frac{1}{x^3} \le \frac{\cos\left(e^{2x}+1\right)}{x^3} \le \frac{1}{x^3}\,,\ \forall x > 0\,.$$

Como

$$\lim_{x\to +\infty} -\frac{1}{x^3} = 0 = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^3}$$

podemos concluir pelo princípio do encaixe que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos\left(e^{2x}+1\right)}{x^3} = 0\,. \quad \text{(1,0 val.)}$$

Tendo em conta que

$$\left(\frac{x}{x-2}\right)^{x-2} = e^{\log\left(\frac{x}{x-2}\right)^{x-2}} = e^{(x-2)(\log(x)-\log(x-2))}\,,\ \forall x > 2\,,$$

temos que

$$\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{x}{x-2}\right)^{x-2} = e^{\lim_{x\to 2^+}(x-2)(\log(x)-\log(x-2))}\,.$$

Como

$$\lim_{x\to 2^+} (x-2)\log(x) = 0\cdot\log(2) = 0$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+}(x-2)\log(x-2) &= \lim_{x\to 2^+}\frac{\log(x-2)}{\frac{1}{x-2}} = \frac{-\infty}{+\infty}\\ &\overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{1}{(x-2)^2}} = \lim_{x\to 2^+} -(x-2) = 0\,,\end{aligned}$$

podemos concluir que

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x}{x-2}\right)^{x-2} = e^0 = 1\,. \quad \text{(2,0 val.)}$$

□

3. (2,0 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$a)\ \log\left[\cos(x)\arctan\left(1+e^x\right)\right]\ ; \qquad b)\ \frac{\operatorname{senh}\left(1+\cosh(x/2)\right)}{\sqrt{x}}\,.$$

Resolução.

$$\begin{aligned}\left(\log\left[\cos(x)\arctan\left(1+e^x\right)\right]\right)' &= \frac{\left(\cos(x)\arctan\left(1+e^x\right)\right)'}{\cos(x)\arctan\left(1+e^x\right)}\\ &= \frac{(\cos(x))'\arctan\left(1+e^x\right)+\cos(x)\left(\arctan\left(1+e^x\right)\right)'}{\cos(x)\arctan\left(1+e^x\right)}\\ &= \frac{-\operatorname{sen}(x)\arctan\left(1+e^x\right)+\cos(x)\frac{(1+e^x)'}{1+(1+e^x)^2}}{\cos(x)\arctan\left(1+e^x\right)}\\ &= \frac{-\operatorname{sen}(x)\arctan\left(1+e^x\right)+\cos(x)\frac{e^x}{1+(1+e^x)^2}}{\cos(x)\arctan\left(1+e^x\right)} \quad \text{(1,0 val.)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\operatorname{senh}\left(1+\cosh(x/2)\right)}{\sqrt{x}}\right)'\\ &= \frac{\left(\operatorname{senh}\left(1+\cosh(x/2)\right)\right)'\sqrt{x}-\operatorname{senh}\left(1+\cosh(x/2)\right)\left(\sqrt{x}\right)'}{x}\\ &= \frac{\cosh\left(1+\cosh(x/2)\right)\left(1+\cosh(x/2)\right)'\sqrt{x}-\operatorname{senh}\left(1+\cosh(x/2)\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}\\ &= \frac{\cosh\left(1+\cosh(x/2)\right)\operatorname{senh}(x/2)\frac{\sqrt{x}}{2}-\operatorname{senh}\left(1+\cosh(x/2)\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \quad \text{(1,0 val.)}\end{aligned}$$

□

4. (2,0 val.) Recorrendo ao método de indução, mostre que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^n}{x} = 0 \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Resolução. $[P(1)]$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0\,.$$

$[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assumindo como verdadeira a hipótese $P(n)$, i.e.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^n}{x} = 0 \quad \text{para um determinado } n \in \mathbb{N},$$

há que mostrar a validade da tese $P(n+1)$, i.e.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^{n+1}}{x} = 0 \quad \text{para o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}.$$

Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^{n+1}}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} &\overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(n+1)(\log x)^n(1/x)}{1} \\ &= (n+1)\cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^n}{x} \overset{\text{hip}}{=} (n+1)\cdot 0 = 0\,.\end{aligned}$$

□

5. (7,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em todo o $\mathbb{R}$ e definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por

$$f(x) = \begin{cases} c + \log(x+e)\,, & \text{se } x > 0; \\ e^{-x^2}\,, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

onde c designa uma constante real.

(a) (1,0 val.) Determine $f(0)$ e o valor de c.

Resolução. Sendo f contínua em 0, temos que

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)\,.$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} c + \log(x+e) = c+1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-x^2} = e^0 = 1\,,$$

temos que

$$c + 1 = 1 \Rightarrow c = 0 \quad \text{e} \quad f(0) = 1\,.$$

□

(b) (1,0 val.) Mostre que f não é diferenciável no ponto 0.

Resolução. f é claramente diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+e}\,, & \text{se } x > 0; \\ -2xe^{-x^2}\,, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Pelo corolário do teorema de Lagrange, temos então que

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x+e} = \frac{1}{e}$$

e

$$f'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -2xe^{-x^2} = 0 \cdot 1 = 0\,.$$

Como $f'_e(0) \neq f'_d(0)$, podemos concluir que f não é diferenciável no ponto 0. □

(c) (3,0 val.) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e contradomínio de f.

Resolução. Temos que

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+e} > 0 \quad \text{e} \quad x < 0 \Rightarrow f'(x) = -2xe^{-x^2} > 0\,.$$

Logo, f é estritamente crescente em $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$. Sendo contínua em 0, podemos concluir que f é estritamente crescente em todo o $\mathbb{R}$.

Assim, f não tem extremos.

A segunda derivada de f é dada por

$$x > 0 \Rightarrow f''(x) = \left(\frac{1}{x+e}\right)' = -\frac{1}{(x+e)^2} < 0$$

e

$$x < 0 \Rightarrow f''(x) = \left(-2xe^{-x^2}\right)' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2(2x^2-1)e^{-x^2}\,.$$

Como

$$2x^2 - 1 > 0 \text{ para } x \in \left]-\infty, -1/\sqrt{2}\right[\quad \text{e} \quad 2x^2 - 1 < 0 \text{ para } x \in \left]-1/\sqrt{2}, 0\right[\,,$$

temos que

$$f''(x) < 0 \text{ para } x \in \left]-1/\sqrt{2}, 0\right[\cup \,]0, +\infty[\quad \text{e} \quad f''(x) > 0 \text{ para } x \in \left]-\infty, -1/\sqrt{2}\right[\,,$$

sendo que

$$f''\left(-1/\sqrt{2}\right) = 0\,.$$

Assim, f tem a concavidade voltada para baixo (côncava) nos intervalos $\left]-1/\sqrt{2},0\right[$ e $]0,+\infty[$, tem a concavidade voltada para cima (convexa) no intervalo $\left]-\infty,-1/\sqrt{2}\right[$ e tem uma inflexão no ponto $-1/\sqrt{2}$.

Finalmente, tendo em conta que f é contínua e estritamente crescente com

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0^+ \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log(x+e) = +\infty\,,$$

podemos concluir pelo Teorema do Valor Intermédio que o contradomínio de f é

$$f(\mathbb{R}) =]0,+\infty[\ .$$

□

(d) (1,0 val.) Justifique que f admite inversa f^{-1} e identifique-a.

Resolução. Sendo f estritamente crescente em $\mathbb{R}$, é necessariamente injectiva pelo que admite inversa:

$$f^{-1} : f(\mathbb{R}) =]0,+\infty[\ \to \mathbb{R}\,.$$

Como

$$\log(x+e) = y \Rightarrow x+e = e^y \Rightarrow x = e^y - e\,,\ \forall\, x>0\,,\ y>1\,,$$

e

$$e^{-x^2} = y \Rightarrow -x^2 = \log(y) \Rightarrow x^2 = \log(1/y) \Rightarrow x = -\sqrt{\log(1/y)}\,,\ \forall\, x<0\,,\ 0<y<1\,,$$

temos que

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} e^y - e\,, & \text{se } y>1; \\ 0\,, & \text{se } y=1; \\ -\sqrt{\log(1/y)}\,, & \text{se } 0<y<1. \end{cases}$$

□

(e) (1,0 val.) Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(2)=1$ e $g'(2)=1+e$. Calcule o valor de $(f\circ g)'(2)$.

Resolução. Usando a fórmula para a derivada de uma função composta, temos que

$$(f\circ g)'(2) = f'(g(2))\cdot g'(2) = f'(1)\cdot(1+e)\,.$$

Como

$$f'(1) = \frac{1}{1+e}$$

podemos concluir que

$$(f\circ g)'(2) = \frac{1}{1+e}\cdot(1+e) = 1\,.$$

□

6. (2,0 val.) Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^n \,, \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ onde } 1 < n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que f é constante.

Resolução. Para mostrar que f é constante é suficiente provar que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(a) = 0$ para todo o $a \in \mathbb{R}$. Observe-se que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n} \cdot (x - a)^{n-1} \,.$$

Como

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n} \right| = \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|^n} \leq 1 \,, \ \forall x \neq a \quad \text{(pela hipótese do enunciado)}$$

tem-se que

$$-|x - a|^{n-1} \leq \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n} \cdot (x - a)^{n-1} \leq |x - a|^{n-1} \,, \ \forall x \neq a \,.$$

Tendo em conta que

$$\lim_{x \to a} |x - a|^{n-1} = 0 \,, \ \forall a \in \mathbb{R} \quad \text{(porque } n > 1\text{)}$$

podemos concluir pelo princípio do encaixe que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n} \cdot (x - a)^{n-1} = 0 \,, \ \forall a \in \mathbb{R} \,,$$

e portanto f é de facto diferenciável em $\mathbb{R}$ com $f'(a) = 0$ para todo o $a \in \mathbb{R}$. $\square$