Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LMAC, MEBIOM, MEFT – 1º SEM. 2014/15

3ª FICHA DE EXERCÍCIOS - PARTE 2

Primitivação é a operação "inversa" da derivação. Mais precisamente, uma **primitiva** de uma função f é uma função F com derivada $F' = f$, i.e. tal que

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)\,.$$

Escreveremos então que

$$F(x) = \int f(x)\,dx\,,$$

o que significa precisamente que "F é uma função com derivada $F' = f$". Notem que

$$F' = f \Rightarrow (F+c)' = f \text{ para qualquer constante } c \in \mathbb{R},$$

pelo que se F é uma primitiva de f, então $F + c$ também é uma primitiva de f.

O objectivo desta ficha é aprender a encontrar primitivas de algumas funções elementares, quando essas primitivas podem também ser expressas como funções elementares. Aqui, o termo **função elementar** significa uma função que pode ser expressa por adição, multiplicação, divisão e composição de funções polinomiais, potências, funções trigonométricas, hiperbólicas e respectivas inversas, e funções exponencial e logaritmo.

I. Primitivas Imediatas.

As fórmulas para as derivadas de algumas funções bem nossas conhecidas, conduzem à seguinte tabela de primitivas imediatas:

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \Rightarrow \int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,,\ \forall \alpha \neq -1$$

$$\frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|\,,\ \forall x \neq 0$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \Rightarrow \int e^x\,dx = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = (\log a)a^x \Rightarrow \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}\,,\ \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \Rightarrow \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \Rightarrow \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \Rightarrow \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = -\cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x \Rightarrow \int \cosh x\, dx = \operatorname{senh} x$$
$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x \Rightarrow \int \operatorname{senh} x\, dx = \cosh x$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} x$$
$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{argsenh} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \operatorname{argsenh} x$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{argcosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \operatorname{argcosh} x$$

Temos também que

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \Rightarrow \int (f+g)\, dx = \int f\, dx + \int g\, dx$$

e

$$\frac{d}{dx}(cf) = c\frac{df}{dx} \Rightarrow \int cf\, dx = c\int f\, dx\,, \text{ para qualquer constante } c \in \mathbb{R}.$$

Usando estes factos, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $2x^5$	2) $x + \sqrt{x}$	3) $\sqrt{2x} + \sqrt{\dfrac{x}{2}}$
4) $\dfrac{3}{\sqrt{x}} + \dfrac{x\sqrt{x}}{4}$	5) $\dfrac{x^2-2x+5}{\sqrt{x}}$	6) $\dfrac{\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}}$
7) $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)^2$	8) $(x^2+1)^3$	9) $\dfrac{6}{\operatorname{sen}^2(x)}$
10) $\dfrac{5}{\cos^2(x)}$	11) $\tan^2(x)$	12) $\cot^2(x)$
13) $\dfrac{4}{1+x^2}$	14) $\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$	15) $\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}$
16) $-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	17) e^{x+3}	18) e^{x-1}
19) $3e^x + \sqrt{x}$	20) 2^x	21) $\dfrac{a^x}{b^x}$
22) $\dfrac{1}{3x}$	23) $\dfrac{3}{x} + \sqrt{x}$	24) $3\operatorname{sen}(x)$
25) $2\cos(x)$	26) $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(x)}$	27) $2\operatorname{senh}(x) + 3\cosh(x)$

II. Primitivas Quase-Imediatas.

A fórmula para a derivada da função composta

$$(F(u(x)))' = F'(u(x)) \cdot u'(x)$$

diz-nos que

$$F(x) = \int f(x)\,dx \Rightarrow F(u(x)) = \int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx\,.$$

Esta fórmula, combinada com a tabela anterior de primitivas imediatas, conduz à seguinte tabela de primitivas quase-imediatas.

$$\int u(x)^\alpha u'(x)\,dx = \frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,,\ \forall \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \log|u(x)|$$

$$\int e^{u(x)} u'(x)\,dx = e^{u(x)}$$

$$\int a^{u(x)} u'(x)\,dx = \frac{a^{u(x)}}{\log a}\,,\ \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\int \cos(u(x))u'(x)\,dx = \operatorname{sen}(u(x))$$

$$\int \operatorname{sen}(u(x))u'(x)\,dx = -\cos(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}\,dx = \tan(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2(u(x))}\,dx = -\cot(u(x))$$

$$\int \cosh(u(x))u'(x)\,dx = \operatorname{senh}(u(x))$$

$$\int \operatorname{senh}(u(x))u'(x)\,dx = \cosh(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}\,dx = \operatorname{arcsen}(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\,dx = \arctan(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}}\,dx = \operatorname{argsenh}(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-1}}\,dx = \operatorname{argcosh}(u(x))$$

Temos assim por exemplo que

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} = -\log|\cos x|$$

e

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen} x} = \log|\operatorname{sen} x|$$

Usando estes factos, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $\frac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}$	2) $x\sqrt{x^2+1}$	3) $x\sqrt{1-x^2}$
4) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	5) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	6) $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$
7) $\operatorname{sen}(2x)$	8) $\cos(3x)$	9) $\operatorname{sen}(x)\cos(x)$
10) $x\operatorname{sen}(x^2)$	11) $x\cos(x^2)$	12) $x\cos(x^2+1)$
13) $\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$	14) $\frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$	15) $\frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x^2}$
16) $x^2\cos(x^3-1)$	17) $x^2\operatorname{sen}(x^3+1)$	18) $x\operatorname{sen}(x^2)\cos(x^2)$
19) $\operatorname{sen}^3(x)\cos(x)$	20) $\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$	21) $\operatorname{sen}(x)\cos^2(x)$
22) e^{5x}	23) $\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{e^{4x}}$	24) xe^{x^2}
25) xe^{-x^2}	26) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$	27) $\frac{e^{1/x}}{x^2}$
28) $e^x e^{e^x}$	29) $\frac{1}{3x-7}$	30) $\frac{1}{4-5x}$
31) $\frac{x}{1+x^2}$	32) $\frac{x}{x^2+4}$	33) $\frac{x^2}{1+x^3}$
34) $\frac{e^x}{2+e^x}$	35) $\frac{e^{x+1}}{1+e^x}$	36) $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$
37) $e^x\operatorname{sen}(e^x)$	38) $e^{\operatorname{sen}^2(x)}\operatorname{sen}(2x)$	39) $\frac{\log x}{x}$
40) $\frac{\cos(\log x)}{x}$	41) $\frac{\log(\log x)}{x\log x}$	42) $\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$
43) $\tan(2x)$	44) $\cot(5x-7)$	45) $\frac{\tan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
46) $\frac{1}{\operatorname{sen}^2(3x)}$	47) $\frac{\tan x}{\cos^2(x)}$	48) $\tan^3(x)$

49) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 50) $\dfrac{1}{a^2+x^2}$ 51) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

52) $\dfrac{x^3}{x^8+1}$ 53) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ 54) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

55) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ 56) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ 57) $\operatorname{senh}(2x+1)\cosh(2x+1)$

III. Primitivas de Funções Racionais.

É possivel primitivar qualquer função racional, i.e. qualquer função $f = p/q$ com p e q polinómios, em termos de funções elementares (cf. Spivak). Ilustramos aqui esse facto quando p é um polinómio de grau ≤ 2 e q é um polinómio do terceiro grau da forma $q(x) = x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$. A primitiva de $f = p/q$ depende essencialmente da natureza deste polinómio denominador.

Caso 1. O polinómio denominador q tem 3 raizes reais distintas, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,,\ \text{com } \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\,,\ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}\,,\ \text{com } A,B,C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| + B\log|x-\beta| + C\log|x-\gamma|\,.$$

Caso 2. O polinómio denominador q tem uma raiz real simples e outra raiz real dupla, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^2\,,\ \text{com } \alpha,\beta \in \mathbb{R}\,,\ \alpha \neq \beta.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2}\,,\ \text{com } A,B,C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| + B\log|x-\beta| - \frac{C}{x-\beta}\,.$$

Caso 3. O polinómio denominador q tem uma raiz real tripla, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)^3\,,\ \text{com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3}\,,\ \text{com } A,B,C \in \mathbb{R},$$

pelo que
$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| - \frac{B}{x-\alpha} - \frac{C}{2(x-\alpha)^2}\,.$$
Caso 4. O polinómio denominador q tem apenas uma raiz real simples, i.e.
$$q(x) = (x-\alpha)((x-a)^2+b^2)\,,\ \text{com } \alpha, a, b \in \mathbb{R}\,,\ b \neq 0.$$
Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma
$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,,\ \text{com } A, B, C \in \mathbb{R},$$
pelo que
$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| + \int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,dx\,,$$
onde a última primitiva é quase-imediata, podendo ser expressa usando as funções logaritmo e arco tangente.

Usando estes factos, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$ 2) $\dfrac{1}{x^2-1}$ 3) $\dfrac{x^4}{1-x}$

4) $\dfrac{x}{x^2-25}$ 5) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ 6) $\dfrac{x}{x^2+x+1}$

7) $\dfrac{x+4}{x^2+1}$ 8) $\dfrac{2x}{(x^2-1)(x+1)}$ 9) $\dfrac{6+x}{(4-x^2)(x+2)}$

10) $\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)(x+1)}$ 11) $\dfrac{3x+1}{x^3-x}$ 12) $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$

13) $\dfrac{3x-1}{(x^2-1)(x+1)}$ 14) $\dfrac{x+10}{(x^2-4)(x+2)}$ 15) $\dfrac{1+x^2}{x^3-2x^2+x}$

16) $\dfrac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x-3)}$ 17) $\dfrac{x^2-4x+6}{(x+2)(x-1)^2}$ 18) $\dfrac{3x^2+3x+2}{(x-1)(x^2+2x+1)}$

19) $\dfrac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}$ 20) $\dfrac{1+x}{1-x^4}$ 21) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)}$

22) $\dfrac{x-2}{(1+x^2)(x+3)}$ 23) $\dfrac{x+2}{(4-x^2)(1+x^2)}$ 24) $\dfrac{x^2+x-1}{(1+x^2)(x+3)}$

25) $\dfrac{x^2-3x+4}{(x-2)(x^2-2x+2)}$ 26) $\dfrac{x^2-x}{(x-2)(x^2-2x+2)}$ 27) $\dfrac{2x^2+4x+3}{(1+x)(x^2+2x+2)}$

28) $\dfrac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}$ 29) $\dfrac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$ 30) $\dfrac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}$

IV. Primitivação por Partes.

A fórmula para a derivada do produto de duas funções u e v,

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Leftrightarrow u \cdot v' = (u \cdot v)' - u' \cdot v\,,$$

dá origem à **fórmula de primitivação por partes**:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx\,.$$

Esta fórmula é particularmente útil quando a função que queremos primitivar pode ser expressa como o produto de uma função u, cuja derivada é mais simples do que u, com uma função v' com primitiva imediata ou quase-imediata v.

Há dois truques que são usados de forma frequente na primitivação por partes. O primeiro é escrever $\int f(x)\, dx = \int 1 \cdot f(x)\, dx$ e considerar $u = f$ e $v' = 1$. Obtem-se então que

$$\int f(x)\, dx = x \cdot f(x) - \int x \cdot f'(x)\, dx\,.$$

Por exemplo,

$$\int \log x\, dx = \int 1 \cdot \log x\, dx = x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \cdot \log x - \int 1\, dx = x \log x - x\,.$$

O segundo truque é usar primitivação por partes para encontrar $\int f$ em termos da própria $\int f$ e depois resolver em ordem à $\int f$. Por exemplo,

$$\int \frac{\log x}{x}\, dx = \int \frac{1}{x} \cdot \log x\, dx = \log x \cdot \log x - \int \log x \cdot \frac{1}{x}\, dx = (\log x)^2 - \int \frac{\log x}{x}\, dx$$

pelo que

$$2 \int \frac{\log x}{x}\, dx = (\log x)^2 \Rightarrow \int \frac{\log x}{x}\, dx = \frac{(\log x)^2}{2}\,.$$

Usando estes factos, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $x \operatorname{sen} x$	2) $x \cos x$	3) xe^x
4) $x \log x$	5) $(\log x)^2$	6) $x^2 \operatorname{sen} x$
7) $x^2 \cos x$	8) $x^2 e^x$	9) $x^2 \log(1+x)$
10) $\operatorname{sen}^2(x)$	11) $\cos^2(x)$	12) $\operatorname{sen}^3(x)$
13) $\cos^3(x) \operatorname{sen}^2(x)$	14) $x^3 e^{x^2}$	15) $e^{ax} \operatorname{sen}(bx)$
16) $\cos(\log x)$	17) $\operatorname{arcsen} x$	18) $\arctan x$
19) $x \arctan x$	20) $\sqrt{x} \arctan(1/\sqrt{x})$	21) $\sqrt{x} \arctan(\sqrt{x})$
22) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$	23) $\dfrac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}$	24) $(\log x)^3$

25) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$ 26) $\sqrt{x}\log x$ 27) $x(\log x)^2$

28) $\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ 29) $\dfrac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x}}$ 30) $\cos(x)\log(1+\cos x)$

31) $\operatorname{sen}(x)\log(1+\operatorname{sen} x)$ 32) $\cosh(x)\cos(x)$ 33) $x^2\operatorname{senh} x$

34) $x^2\cosh x$ 35) $\operatorname{senh}^2(x)$ 36) $\cosh^2(x)$

V. Primitivação por Substituição.

A fórmula para a derivada da função composta, já referida nesta ficha, dá origem à **fórmula de primitivação por substituição**:

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(u(t))u'(t)\,dt\right)_{t=u^{-1}(x)}.$$

O procedimento associado à utilização desta fórmula para determinar $\int f(x)\,dx$ pode ser resumido nos seguintes 3 passos:

(i) considerar a substituição $x = u(t)$ e $dx = u'(t)\,dt$ em $\int f(x)\,dx$;
(ii) encontrar $\int f(u(t))u'(t)\,dt$ como função elementar da variável t;
(iii) fazer a substituição inversa $t = u^{-1}(x)$ na função elementar obtida em (ii).

Usando a substituição indicada, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $\dfrac{5}{2(x+1)(\sqrt{x}+2)}$, $x = t^2$ 2) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$, $x-1 = t^2$

3) $\dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$, $1-x = t^2$ 4) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{x+3}}$, $x+3 = t^2$

5) $\dfrac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}$, $x+2 = t^2$ 6) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$, $x+1 = t^2$

7) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+2x}}$, $1+2x = t^2$ 8) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^4})}$, $x = t^3$

9) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, $x = t^6$ 10) $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$, $t^2 = \dfrac{x}{x+2}$

11) $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $t^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$ 12) $\dfrac{1}{1+e^x}$, $t = e^x$

13) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$, $t^2 = 1+e^x$ 14) $\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}$, $t = e^x$

15) $\dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}\,,\ t = e^{2x}$

16) $\dfrac{1}{x(1+\log^2(x))}\,,\ t = \log x$

17) $\dfrac{\log x}{x(\log(x)-1)^2}\,,\ t = \log x$

18) $\dfrac{1}{x\log x(1-\log x)}\,,\ t = \log x$

19) $\dfrac{\cos x}{4+\operatorname{sen}^2(x)}\,,\ t = \operatorname{sen} x$

20) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}}\,,\ t = \operatorname{sen} x$

21) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{4+\cos^2(x)}\,,\ t = \cos x$

22) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}\,,\ t = \cos x$

23) $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos^2(x)}\,,\ t = \operatorname{sen} x$

24) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x-\operatorname{sen}^2(x)}\,,\ t = \cos x$

25) $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{(1-\operatorname{sen} x)\cos^2(x)}\,,\ t = \operatorname{sen} x$

26) $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos x(1+\cos^2(x))}\,,\ t = \cos x$

27) $\dfrac{1}{\cos x}\,,\ t = \operatorname{sen}(x)$

28) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\,,\ t = \cos(x)$

29) $\dfrac{1}{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}\,,\ t = \operatorname{sen}(x)$

30) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x(1+\cos x)}\,,\ t = \cos(x)$

31) $\dfrac{1}{\cosh x}\,,\ t = \operatorname{senh}(x)$

32) $\dfrac{1}{\operatorname{senh} x}\,,\ t = \cosh(x)$

33) $\dfrac{1}{2+\tan x}\,,\ t = \tan x$

34) $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\,,\ t = \tan x$

35) $\sqrt{1+x^2}\,,\ x = \tan t$

36) $\sqrt{1+x^2}\,,\ x = \operatorname{senh} t$

37) $\sqrt{x^2-1}\,,\ x = \dfrac{1}{\cos t}$

38) $\sqrt{x^2-1}\,,\ x = \cosh t$

39) $\sqrt{1-x^2}\,,\ x = \operatorname{sen} t$

40) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,,\ x = \operatorname{sen} t$

41) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,,\ t^2 = 1-x^2$

42) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,,\ t^2 = 1+x^2$

43) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,,\ x = \tan t$

44) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,,\ x = \operatorname{senh} t$

45) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,,\ t^2 = x^2-1$

46) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,,\ x = \dfrac{1}{\cos t}$

47) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,,\ x = \cosh t$

48) $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,,\ x = \operatorname{sen}^2(t)$

VI. Treino Complementar de Primitivas.

Usando qualquer um dos métodos de primitivação indicados na Ficha 5, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $e^{x-1}(1+e^x)$

2) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$

4) $\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$

5) $\dfrac{1+x}{1+x^2}$

6) $\dfrac{2x}{x^2-4x+3}$

7) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

8) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$

9) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

10) $\dfrac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$

11) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$

12) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

13) $\dfrac{x^3+7x^2-5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3}$

14) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

15) $\dfrac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}$

16) $\log(\cos x)\tan x$

17) $\dfrac{\operatorname{sen}^3(x)}{\cos^2(x)}$

18) $\dfrac{\tan x}{\cos^3(x)}$

19) $x\tan^2(x)$

20) $\dfrac{1}{\cos^3(x)}$

21) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^3(x)}$

22) $\dfrac{\arctan x}{x^2}$

23) $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$

24) $x\arctan(1+x)$

25) $x^2\arctan x$

26) $\dfrac{x\arctan x}{(1+x^2)^3}$

27) $\arctan(\sqrt{x})$

28) $\log(\sqrt{1+x^2})$

29) $x\log(\sqrt{1+x^2})$

30) $\log(a^2+x^2)$

31) $\operatorname{arcsen}(1/x)$

32) $x\operatorname{arcsen}(1/x)$

33) $\operatorname{arcsen}(\sqrt{x})$

34) $e^{\sqrt{x}}$

35) $\log(x+\sqrt{x})$

36) $(\operatorname{arcsen} x)^2$

37) $\dfrac{\log x}{(1+x)^2}$

38) $e^x\log(1+e^{2x})$

39) $\dfrac{x+1}{x^5+4x^3}$

40) $\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

41) $\dfrac{1}{x^4+1}$

42) $\sqrt{\tan x}$

43) $\dfrac{2x}{(x^2+x+1)^2}$

44) $\dfrac{3x}{(x^2+x+1)^3}$

45) $\dfrac{1}{x^6+1}$

46) $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x}$

47) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x+\cos x}$

48) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$

VII. Definição de Integral e Critérios de Integrabilidade.

1) Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com $a < b < c < d$, e $f : [a, d] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, d]$. Prove que f é integrável em $[b, c]$.

2) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, $c \in [a, b]$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que $g(x) = f(x)$, para $x \neq c$. Mostre que g é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b g = \int_a^b f$.

3) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções tais $f(x) = g(x)$ excepto possivelmente num número finito de pontos. Mostre que se f é integrável em $[a, b]$ então g também é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b f = \int_a^b g$.

4) Chama-se **função seccionalmente contínua** a uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que é contínua excepto num número finito de pontos $\{c_1, \ldots, c_n\}$, incluindo possivelmente os extremos a e b, e em que todos os limites laterais $\lim_{x\to c_i^\pm} f$, $\lim_{x\to a^+} f$, $\lim_{x\to b^-} f$ existem e são finitos. Mostre que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente contínua então f é integrável em $[a, b]$.

5) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não-negativa. Mostre que se $\int_a^b f = 0$ então f é identicamente nula.

6) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não-negativa (i.e. $f(x) \geq 0\,,\ \forall x \in [a, b]$). Mostre que se existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) > 0$ então $\int_a^b f > 0$.

7) Seja V o espaço vectorial das funções contínuas no intervalo $[a, b]$. Dada uma função $f \in V$ considere a transformação linear $T_f : V \to \mathbb{R}$ definida por

$$T_f(g) = \int_a^b f(x)g(x)\, dx\ ,\ g \in V\ .$$

Mostre que T_f é identicamente nula se e só se f o for.

8) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que se $\int_a^b f = 0$ então existe pelo menos um ponto $c \in \,]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

9) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas. Mostre que se $\int_a^b f = \int_a^b g$ então existe pelo menos um ponto $c \in \,]a, b[$ tal que $f(c) = g(c)$.

10) Considere a função $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x\,, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mostre que

$$\overline{\int_0^1} h = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}\ .$$

O que pode dizer quanto à integrabilidade de h em $[0, 1]$?
<u>Sugestão</u>: Poderá usar, sem demonstrar, o seguinte facto:

$$\sup_{[a,b]} h = b\,,\ \text{para todo o intervalo } [a, b] \text{ contido em } [0, 1].$$

11) Considere a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} -x\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0\,, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mostre que

$$\underline{\int_0^1} h = \int_0^1 (-x)\ dx = -\frac{1}{2}\ .$$

O que pode dizer quanto à integrabilidade de h em $[0,1]$?

Sugestão: Poderá usar, sem demonstrar, o seguinte facto:

$$\inf_{[a,b]} h = -b\,,\ \text{ para todo o intervalo } [a,b] \text{ contido em } [0,1].$$

12) Seja $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt\ ,$$

onde f é uma função limitada e integrável no intervalo $[a,b]$. Mostre que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| \leq K|x - y|\ ,\ \forall x, y \in [a,b]\ .$$

13) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável tal que $m \leq f(x) \leq M\,,\ \forall\, x \in [a,b]$. Mostre que

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)\mu\,,$$

para algum $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq \mu \leq M$.

14) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)f(\xi)\,,$$

para algum $\xi \in [a,b]$.

15) Mostre que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável então $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$ também é integrável.

16) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Mostre que se f é integrável em $[a,x]$ para todo o $x \in [a,b[$, então f é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f\ .$$

VIII. Integral Indefinido e Teorema Fundamental do Cálculo.

1) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas. Mostre que se $\int_c^d f = \int_c^d g$ para quaisquer $c, d \in [a, b]$, então $f(x) = g(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

2) Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[-1, 1]$, contínua em $[-1, 1] \setminus \{0\}$ e com limites laterais finitos em $x = 0$:

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \quad \text{e} \quad f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x)\,.$$

Mostre que a função $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\, dt$$

é diferenciável em $x = 0$ e que $\varphi'(0) = f(0^-) + f(0^+)$.

Sugestão: para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x}$ deverá usar primeiro a regra de Cauchy e analisar em seguida os casos $x \to 0^-$ e $x \to 0^+$ separadamente.

3) Considere a função $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida pela identidade:

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \cdot e^{\frac{t^2+1}{t}}\, dt\,.$$

(a) Mostre que $F(1/x) = -F(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

(b) Mostre que F é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e calcule $F'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

4) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(x) = \int_0^x x f(t)\, dt\,.$$

Mostre que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule $F'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

5) Sendo F a função definida em $\mathbb{R}$ pela seguinte expressão, calcule $F'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

$$(a)\ F(x) = \int_x^0 \operatorname{sen}^2 t\, dt \qquad (b)\ F(x) = \int_x^{x^2} \log(1 + t^2)\, dt \qquad (c)\ F(x) = \int_0^x \frac{e^{x+t}}{t^2 + 1}\, dt$$

6) Mostre que os valores das seguintes expressões não dependem de x.

$$(a)\ \int_0^x \frac{1}{1 + t^2}\, dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1 + t^2}\, dt\,,\ x > 0 \qquad (b)\ \int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt\,,\ x \in\,]0, \pi/2[$$

7) Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pela fórmula

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt\,.$$

Mostre que

$$\int_0^1 F(x)\, dx = F(1) + \frac{1}{2e} - \frac{1}{2}\,.$$

8) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que f é ímpar (i.e. $f(x) = -f(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}$) se e só se

$$\int_{-x}^{x} f(t)\ dt = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

9) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que f é par (i.e. $f(x) = f(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}$) se e só se

$$\int_{-x}^{x} f(t)\ dt = 2\int_{0}^{x} f(t)\ dt,\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

10) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par, tal que

$$\log(1 + f(x)) = \int_{0}^{x^2} \frac{e^t}{1 + f(\sqrt{t})}\ dt\,.$$

11) Determine a única função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não identicamente nula, que satisfaz a equação

$$\int_{0}^{x} f^3(t)\ dt = \left(\int_{0}^{x} f(t)\ dt\right)^2\,.$$

12) Determine a única função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par e não identicamente nula, que satisfaz a equação

$$f^2(x) = \int_{0}^{x^2} f(\sqrt{t})\ dt\,.$$

13) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(x) < 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Justifique que a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \int_{-x}^{x^3} f(t)\ dt\,,$$

é diferenciável e mostre que $\varphi'(x) < 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

14) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Justifique que a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \int_{-x}^{x^3} f(t)\ dt\,,$$

é diferenciável e mostre que $\varphi'(x) > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

15) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não nula, tal que

$$f^2(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,\frac{t}{1+t^2}\ dt\,.$$

16) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não nula, tal que

$$f^2(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ dt\,.$$

17) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não nula, tal que

$$f^2(x) = \int_0^x f(t)\,\frac{\operatorname{sen} t}{2-\cos t}\;dt\,.$$

18) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não nula, tal que

$$f^2(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x f(t)\,\frac{\cos t}{2+\operatorname{sen} t}\;dt\,.$$

19) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ímpar e não identicamente nula, tal que

$$(f(x))^3 = \int_{-x}^x f^2(t)\cos(t)\;dt\,.$$

20) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ímpar e não identicamente nula, tal que

$$(f(x))^3 = \int_{-x}^x \frac{f^2(t)}{1+t^2}\;dt\,.$$

21) Determine uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^x f(t)\;dt = \int_x^1 t^4 f(t)\;dt + \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6} + k\,.$$

22) Determine uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^x f(t)\;dt = \int_x^1 t^2 f(t)\;dt + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + k\,.$$

23) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\cos(f(x)) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(f(\sqrt{t}))\cos(t)\;dt\,.$$

24) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{sen}(f(x)) = \int_0^{x^2} \cos(f(\sqrt{t}))\operatorname{sen}(t)\;dt\,.$$

25) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, positiva, tal que

$$\log(f(x)) = \int_0^x \frac{t}{f(t)\sqrt{1+t^2}}\;dt\,.$$

26) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, positiva, tal que

$$\log(f(x)) = \int_0^x \frac{t}{f(t)\,(1+t^2)}\;dt\;.$$

IX. Regra de Barrow e Cálculo de Áreas.

1) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = e^x\,, \quad y = 1 - x \quad \text{e} \quad x = 1\,.$$

2) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = e^{-x}\,, \quad y = 1 + x \quad \text{e} \quad x = -1\,.$$

3) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = xe^{x-1}\,, \quad y = 1 \quad \text{e} \quad x = 0\,.$$

4) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = (1-x)e^{-x}\,, \quad y = 1 \quad \text{e} \quad x = 1\,.$$

5) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = \log x\,, \quad y = 1 - x \quad \text{e} \quad y = 1\,.$$

6) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = \log(1+x)\,, \quad y = -\log(1+x) \quad \text{e} \quad x = e - 1\,.$$

7) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = \log(2+x)\,, \quad y = -\log(2+x) \quad \text{e} \quad x = e - 2\,.$$

8) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = x^2 - \frac{\pi^2}{4} \quad \text{e} \quad y = \cos x\,.$$

9) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = x^2\,, \quad y = \frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad y = x\,.$$

10) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = e^x\,, \quad y = e^{-x} \quad \text{e} \quad x = 2\,.$$

11) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = \log(1+x^2) \quad \text{e} \quad y = \log(2)\,.$$

12) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições
$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq x \operatorname{sen} x\,.$$

13) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições
$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq x \cos x\,.$$

14) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$1 \le x \le e \quad \text{e} \quad 0 \le y \le \frac{1}{x(1+\log^2(x))}\,.$$

15) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$1 \le x \le \sqrt{e} \quad \text{e} \quad 0 \le y \le \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2(x)}}\,.$$

16) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$0 \le x \le 1 \quad \text{e} \quad 0 \le y \le \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

17) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$0 \le x \le 1 \quad \text{e} \quad 0 \le y \le \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\,.$$

18) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$0 \le x \le 2 \quad \text{e} \quad 0 \le y \le \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}\,.$$

19) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$-1 \le x \le 1 \quad \text{e} \quad 0 \le y \le \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}\,.$$

20) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$0 \le x \le 2 \quad \text{e} \quad 0 \le y \le \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}\,.$$

21) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$0 \le x \le \log 2 \quad \text{e} \quad 0 \le y \le \frac{1}{1+e^x}\,.$$

22) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$0 \le x \le \log 2 \quad \text{e} \quad 0 \le y \le \frac{1}{3-e^x}\,.$$