

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I  
LMAC, MEBIOM, MEFT – 1º SEM. 2014/15

3ª FICHA DE EXERCÍCIOS - PARTE 1

I. Representação gráfica de funções.

- 1) Nas alíneas seguintes, cada função está definida em todos os pontos  $x \in \mathbb{R}$  para os quais a fórmula dada para  $f(x)$  faz sentido. Em cada caso, determine intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas de  $f$ , e esboce o seu gráfico.

$$(a) f(x) = x + \frac{1}{x^2} \quad (b) f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)} \quad (c) f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$(d) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} \quad (e) f(x) = \frac{|x|}{1 - |x|} \quad (f) f(x) = x^2 e^{-x}$$

$$(g) f(x) = x e^{1/x} \quad (h) f(x) = \frac{x}{1 + \log x}$$

- 2) Considere a função  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua no ponto 0 e tal que

$$f(x) = \sqrt{x} \log(x), \quad x > 0.$$

- (a) Calcule  $f(0)$ .  
(b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de  $f$  nos pontos com abcissa  $x = 0$  e  $x = 1$ .  
(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função  $f$ .  
(d) Esboce o gráfico de  $f$  e indique qual o seu contradomínio.
- 3) Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = |x| e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Calcule  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .  
(b) Determine (justificando) os pontos  $x \in \mathbb{R}$  onde  $f$  é diferenciável e calcule a sua derivada.  
(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função  $f$ .  
(d) Esboce o gráfico de  $f$  e indique qual o seu contradomínio.
- 4) Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log x & , x > 0 \\ \frac{x^2}{1-x} & , x \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Mostre que  $f$  é uma função de classe  $C^1(\mathbb{R})$ .  
(b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função  $f$ .  
(c) Esboce o gráfico de  $f$  e indique qual o seu contradomínio.

5) Considere a função  $f : ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{x}{2} + \log(x+1) - \log(x-1), \quad \forall x > 1.$$

- (a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de  $f$ .
- (b) Determine as concavidades e inflexões de  $f$ .
- (c) Determine as assíntotas ao gráfico de  $f$ .
- (d) Esboce o gráfico de  $f$  e indique o seu contradomínio.

6) Considere a função  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad \forall x \neq 0.$$

- (a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de  $f$ .
- (b) Determine as concavidades e inflexões de  $f$ .
- (c) Determine as assíntotas ao gráfico de  $f$ .
- (d) Esboce o gráfico de  $f$  e indique o seu contradomínio.

7) Considere a função  $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

- (a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de  $f$ .
- (b) Determine as concavidades e inflexões de  $f$ .
- (c) Determine as assíntotas ao gráfico de  $f$ .
- (d) Esboce o gráfico de  $f$  e indique o seu contradomínio.

## II. Funções Trigonométricas e Hiperbólicas Inversas.

1) Considere a função inversa da função seno hiperbólico,  $\operatorname{argsenh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Mostre que

$$\operatorname{argsenh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \quad \text{e que} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{argsenh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2) Considere a função inversa da função coseno hiperbólico, quando esta última é restrita ao intervalo  $[0, +\infty[$ ,  $\operatorname{argcosh} : [1, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$ . Mostre que

$$\operatorname{argcosh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad \forall x \in [1, +\infty[ ,$$

e que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{argcosh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \forall x \in ]1, +\infty[ .$$

3) Determine o domínio das funções definidas pelas seguintes expressões.

$$(a) f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{x}{2} \quad (b) f(x) = \operatorname{arcsen} e^x \quad (c) f(x) = \operatorname{arccos} \left( \frac{1-x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$(d) f(x) = \operatorname{arccos} \frac{1}{x} \quad (e) f(x) = \operatorname{arcsen} \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \quad (f) f(x) = \operatorname{arctan} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$(g) f(x) = \log \left( \arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \quad (h) f(x) = \log (1 - \arctan x)$$

4) Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \left( \frac{1}{x} \right) & , x < 0 \\ 1 + e^{1-x} & , x \geq 0 . \end{cases}$$

(a) Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

(b) Calcule os limites laterais de  $f$  no ponto 0.

5) Considere a função  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} k \arctan \left( \frac{1}{x} \right) & , x > 0 \\ \frac{1}{x^2 + 1} & , x < 0 . \end{cases}$$

onde  $k \in \mathbb{R}$  é uma constante.

(a) Estude a função  $f$  no que respeita à continuidade no seu domínio  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(b) Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

(c) Determine o valor da constante  $k \in \mathbb{R}$  para o qual a função  $f$  é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(d) Denotando por  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de  $F$ .

6) Calcule  $f'(x)$ , sempre que exista, nos casos em que a função  $f$  é definida pela expressão:

$$(a) f(x) = \arcsen(x/2) \quad (b) f(x) = \arccos(1/x) \quad (c) f(x) = \arcsen(\sen x)$$

$$(d) f(x) = \arctan(\sqrt{x}) \quad (e) f(x) = \arccos(\sqrt{1-x^2}) \quad (f) f(x) = \arcsen\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

$$(g) f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (h) f(x) = \log(\arccos(1/\sqrt{x})) \quad (i) f(x) = e^{\arctan(x)}$$

7) Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & , x \leq 0 \\ \arctan(1/x) & , x > 0 , \end{cases}$$

com  $a, b \in \mathbb{R}$  fixos.

(a) Mostre que  $f$  é diferenciável no ponto 1 e escreva uma equação da tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa 1.

(b) Sabendo que  $f$  é diferenciável no ponto 0, determine os valores de  $a$  e  $b$ .

(c) Defina  $f'$  e diga se a função  $f$  é de classe  $C^1(\mathbb{R})$ .

8) Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(x^2)}{x}, & \text{se } x < 0; \\ \text{sen}(x), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Calcule a derivada de  $f$  em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  
 (b) Mostre que  $f$  é diferenciável no ponto zero com  $f'(0) = 1$ .  
 (c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0))$ .

9) Considere a função  $f : [-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(e^{x^2} - 1)}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \arcsen(x), & \text{se } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Calcule a derivada de  $f$  em  $] -1, +\infty[ \setminus \{0\}$ .  
 (b) Mostre que  $f$  é diferenciável no ponto zero com  $f'(0) = 1$ .  
 (c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0))$ .

10) Considere a função  $f : [-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\log(1 + x^2))}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \arcsen(x), & \text{se } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Calcule a derivada de  $f$  em  $] -1, +\infty[ \setminus \{0\}$ .  
 (b) Mostre que  $f$  é diferenciável no ponto zero com  $f'(0) = 1$ .  
 (c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0))$ .

11) Considere a função  $f : ]-\infty, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \log(1 - \cos(x)), & \text{se } 0 < x < 2\pi; \\ \arctan(x^2), & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Calcule a derivada de  $f$  em  $] -\infty, 2\pi[ \setminus \{0\}$ .  
 (b) Mostre que  $f$  é diferenciável no ponto zero com  $f'(0) = 0$ .  
 (c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0))$ .

12) Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1 + \text{sen}^2(x))}{x}, & \text{se } x < 0; \\ \arctan(x), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Calcule a derivada de  $f$  em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  
 (b) Mostre que  $f$  é diferenciável no ponto zero com  $f'(0) = 1$ .

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0))$ .

**13)** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\operatorname{sen}(x^2)} - 1}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \arctan(x), & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de  $f$  em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(b) Mostre que  $f$  é diferenciável no ponto zero com  $f'(0) = 1$ .

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0))$ .

**14)** Considere a função  $f : [-2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1-\cos(x)} - 1}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \operatorname{arcsen}(x/2), & \text{se } -2 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de  $f$  em  $] -2, +\infty[ \setminus \{0\}$ .

(b) Mostre que  $f$  é diferenciável no ponto zero com  $f'(0) = 1/2$ .

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0))$ .

**15)** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\log(1+x^2))}{x}, & \text{se } x < 0; \\ \arctan(x), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de  $f$  em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(b) Mostre que  $f$  é diferenciável no ponto zero com  $f'(0) = 1$ .

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0))$ .

**16)** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1-\cos(x)} - 1}{x}, & \text{se } x < 0; \\ \arctan(x/2), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de  $f$  em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(b) Mostre que  $f$  é diferenciável no ponto zero com  $f'(0) = 1/2$ .

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0))$ .

**17)** Considere a função  $f : [-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1 + \operatorname{sen}^2(x))}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \operatorname{arcsen}(x), & \text{se } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de  $f$  em  $] -1, +\infty[ \setminus \{0\}$ .

(b) Mostre que  $f$  é diferenciável no ponto zero com  $f'(0) = 1$ .

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0))$ .

18) Considere a função  $f : [-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\operatorname{sen}(x^2)} - 1}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \operatorname{arcsen}(x), & \text{se } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de  $f$  em  $] -1, +\infty[ \setminus \{0\}$ .

(b) Mostre que  $f$  é diferenciável no ponto zero com  $f'(0) = 1$ .

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0))$ .

19) Considere a função  $f : ]-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(e^x - 1)}{x}, & \text{se } x < 0; \\ \operatorname{arcsen}(x/2), & \text{se } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de  $f$  em  $] -\infty, 2[ \setminus \{0\}$ .

(b) Mostre que  $f$  é diferenciável no ponto zero com  $f'(0) = 1/2$ .

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0))$ .

20) Determine, se existirem em  $\overline{\mathbb{R}}$ , os seguintes limites.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen}(2x) - 2 \operatorname{arcsen}(x)}{x^3} \quad (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} x \operatorname{arcsen}(1/x) \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{arcsen}(1/x)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} \quad (e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{\arctan(1/x)} \quad (f) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan(x) \right)^{1/x} \quad (h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \right)^{1/x}$$

21) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíptotas da função  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = x + 2 \arctan \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Esboce o seu gráfico e indique o seu contradomínio.

22) Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \left( \frac{1+x}{|x|} \right), & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Estude  $f$  quanto à continuidade em todo o seu domínio, e quanto à existência de limites quando  $x \rightarrow +\infty$  e quando  $x \rightarrow -\infty$ .

(b) Determine (justificando) os pontos  $x \in \mathbb{R}$  onde  $f$  é diferenciável e calcule a sua derivada.

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função  $f$ .

(d) Esboce o gráfico de  $f$  e indique qual o seu contradomínio.

**23)** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua no ponto 0 e tal que

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \neq 0.$$

(a) Calcule  $f(0)$  e estude  $f$  quanto à existência de limites quando  $x \rightarrow +\infty$  e quando  $x \rightarrow -\infty$ .

(b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de  $f$  nos pontos com abcissa  $x = 0$  e  $x = 1$ .

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função  $f$ .

(d) Esboce o gráfico de  $f$  e indique qual o seu contradomínio.

**24)** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x^2) & , x \geq 0 \\ xe^{1/x} & , x < 0 . \end{cases}$$

(a) Mostre que  $f$  é uma função de classe  $C^1(\mathbb{R})$ .

(b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função  $f$ .

(c) Esboce o gráfico de  $f$  e indique qual o seu contradomínio.

**25)** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arcsen\left(\frac{x}{1+x}\right) & , x \geq 0 \\ x^2e^x & , x < 0 . \end{cases}$$

(a) Mostre que  $f$  é contínua mas não diferenciável no ponto zero.

(b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função  $f$ .

(c) Esboce o gráfico de  $f$  e indique qual o seu contradomínio.

**26)** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = 2 \arctan(x) - x, \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de  $f$ .

(b) Determine as concavidades e inflexões de  $f$ .

(c) Determine as assíntotas ao gráfico de  $f$ .

(d) Esboce o gráfico de  $f$  e indique o seu contradomínio.