Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LMAC, MEBIOM, MEFT – 1º SEM. 2014/15

2ª FICHA DE EXERCÍCIOS

I. Continuidade de Funções.

1) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k + e^{-\frac{1}{x}} & , \ x > 0 \\ x(2-x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

2) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , \ x > 0 \\ (k-x)(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

3) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & , \ x > 0 \\ (x+k)(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

4) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(2 + \frac{k}{x}\right) & , \ x > 1 \\ 1 - x^2 & , \ x < 1 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto 1.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

5) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} & , \ x > 0 \\ k(x+1)^2 & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

6) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \tan\left(\dfrac{\pi x}{2(1+x)}\right) & , \ x > 0 \\ (x+1)^2 - k & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

7) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x} & , \ x > 0 \\ 1 - x^2 & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

8) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2+x^2}\right) & , \ x > 0 \\ \\ (k-x)(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}^+$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}^+$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

9) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-1}} & , \ x > 1 \\ \\ (k-x)(1+x) & , \ x < 1 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}^+$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}^+$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto um.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

10) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos\left(\dfrac{\pi}{2+x^2}\right) & , \ x > 0 \\ \\ (k-x)(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

11) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 \cos\left(\dfrac{\pi}{1+x^2}\right) & , \ x > 0 \\ \\ (k-x)(x+1) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

12) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{k}{2+x^2}\right) & , \ x > 0 \\ \\ -x(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}^+$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}^+$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

13) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \ x > 0 \\ \\ (k-x)(x+1) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

14) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{2}{2+x^2}\right) & , \ x > 0 \\ \\ (k-x)(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}^+$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}^+$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

15) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2+x}\right) & , \ x > 0 \\ \\ (x-1)^2 & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

16) Considere as funções f e g definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}} \\ g(x) &= x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \ . \end{aligned}$$

(a) Estude as funções no que respeita à continuidade.

(b) Indique, justificando, se são prolongáveis por continuidade ao ponto 0.

(c) Mostre que são funções limitadas.

17) Considere as funções f e g definidas em $]0, +\infty[$ por

$$\begin{aligned} f(x) &= \log\log(1+x) \\ g(x) &= \sqrt{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} \ . \end{aligned}$$

(a) Estude as funções no que respeita à continuidade.

(b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

(c) Indique, justificando, se são prolongáveis por continuidade ao ponto 0.

(d) Indique, justificando, o contradomínio de f.

II. Axioma de Supremo

1) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado e não-vazio, com supremo $s = \sup A$. Mostre que para qualquer $\epsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a > s - \epsilon$.

2) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado e não-vazio, com supremo $s = \sup A$. Seja ainda $m \in \mathbb{R}$ um majorante de A distinto de s. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que $a < m - \epsilon$ para todo o $a \in A$.

3) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

(a) Prove que se $\sup A < \inf B$ então A e B são disjuntos.

(b) Mostre por meio de exemplos que se $\sup A \geq \inf B$ então A e B podem ser ou não disjuntos.

4) Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$. Considere o subconjunto $C \subset \mathbb{R}$ definido por

$$C = A + B \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : \ x = a + b \text{ com } a \in A \, , \ b \in B\} \, .$$

Mostre que:

(a) Se A e B têm supremo, então C também tem supremo e $\sup C = \sup A + \sup B$.

(b) Se A e B têm ínfimo, então C também tem ínfimo e $\inf C = \inf A + \inf B$.

5) Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$, tais que

$$a \leq b\,, \text{ para quaisquer } a \in A \text{ e } b \in B.$$

Mostre que existem o supremo de A e o ínfimo de B, e que $\sup A \leq \inf B$.

6) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, limitados e não-vazios, tais que

$$\inf A < \sup B\,.$$

Mostre que existem $a \in A$ e $b \in B$ com $a < b$.

7) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, não-vazios e limitados, tais que $\sup A = \inf B$. Mostre que existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $|a - b| < 1$.

8) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, não-vazios e limitados, tais que $\sup A = \inf B$. Mostre que para qualquer $\varepsilon > 0$, existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $|a - b| < \varepsilon$.

9) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ dois subconjuntos não-vazios e limitados, tais que $\inf B - \sup A = 1$. Mostre que existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $1 \leq b - a < 2$.

10) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ dois subconjuntos não-vazios e limitados, tais que $\sup A - \inf B = 1$. Mostre que existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $0 < a - b \leq 1$.

11) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, limitado e não-vazio, tal que $\sup A - \inf A = 2$. Mostre que existem $a_1, a_2 \in A$ tais que $1 < a_2 - a_1 \leq 2$.

12) Seja A um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$, tal que $|a_1 - a_2| < 1$ para quaisquer $a_1, a_2 \in A$. Mostre que A tem supremo.

13) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, não-vazios e majorados, tais que $\sup A \leq \sup B$. Mostre que o conjunto $C = A \cup B$ tem supremo e que $\sup C = \sup B$.

14) Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$, tais que B é majorado e $A \subset B$. Mostre que A e B têm supremo e que $\sup A \leq \sup B$.

15) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, não-vazio e majorado, tal que $\sup A = 1$. Mostre que $A \cap [0, 1] \neq \emptyset$.

III. Propriedades Globais das Funções Contínuas

1) Seja f uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[0, 1]$, tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo o $x \in [0, 1]$. Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in [0, 1]$ com $f(c) = c$. [Sugestão: aplique o teorema de Bolzano a $g(x) = f(x) - x$.]

2) Seja f uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[a, b]$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$), tal que $f(a) \leq a$ e $f(b) \geq b$. Prove que f tem um ponto fixo em $[a, b]$.

3) Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$f(-1) = 0 = f(1)\,.$$

Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in [-1, 1]$ com $f(c) = c$.

4) Seja $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty\,.$$

Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in]-1,1[$ com $f(c) = c$.

5) Seja $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que existe $b > 0$ tal que $f(b) < f(x)$ para todo o $x > b$. Mostre que f tem mínimo em $[0,+\infty[$.

6) Seja $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que existe $b > 0$ tal que $f(0) > f(x)$ para todo o $x > b$. Prove que f tem máximo em $[0,+\infty[$.

7) Dada uma função $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, considere a função f que é definida em $[-1,1]$ por $f(x) = g(1-x^2)$.

(a) Supondo que g é contínua em todo o seu domínio, mostre que f tem máximo e mínimo.

(b) Supondo apenas que g é contínua em $]0,+\infty[$, poderemos garantir a existência de máximo e mínimo de f? Justifique.

8) Considere uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, e suponha que existem e são finitos os limites de f quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

(a) Prove que f é limitada.

(b) Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in \mathbb{R}$ com $f(c) = c$.

(c) Supondo que o produto dos dois limites indicados é negativo, indique, justificando, o máximo da função

$$g(x) = \frac{1}{1 + [f(x)]^2}\,.$$

9) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, com limites positivos quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, e tal que $f(0) < 0$. Mostre que:

(a) A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções reais.

(b) f tem mínimo em $\mathbb{R}$.

10) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, tal que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \beta\,,$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha < \beta$. Prove que o contradomínio de f contém o intervalo $]\alpha,\beta[$.

11) Seja $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty = \lim_{x\to 1^-} f(x)\,.$$

Prove que f tem máximo no intervalo $]-1,1[$.

12) Seja $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty = \lim_{x\to 1^-} f(x)\,.$$

Prove que f tem mínimo no intervalo $]-1,1[$.

13) Sejam f e g duas funções contínuas em $\mathbb{R}$, e considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < g(x)\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > g(x)\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$. Prove que se A e B são não-vazios, então C também é não-vazio.

14) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva (i.e. $f(x) > 0\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$), tal que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f(x)\,.$$

Prove que f tem máximo.

15) Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$f(0) > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,.$$

Prove que f tem máximo no intervalo $[0, +\infty[$.

IV. Cálculo de Derivadas de Funções.

1) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ (b) $f(x) = x^4 + \operatorname{sen}(x)$ (c) $f(x) = x^4 \operatorname{sen}(x)$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ (e) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{2+\cos(x)}$

(g) $f(x) = \dfrac{x+\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}$ (h) $f(x) = \dfrac{x \operatorname{sen}(x)}{1+x^2}$ (i) $f(x) = \operatorname{senh}(x)\cosh(x)$

2) (a) A área de uma círculo de raio r é πr^2 e o seu perímetro é $2\pi r$. Mostre que a taxa de variação da área em relação ao raio é igual ao perímetro.

(b) O volume de uma esfera de raio r é $4\pi r^3/3$ e a área da sua superfície é $4\pi r^2$. Mostre que a taxa de variação do volume em relação ao raio é igual à área da superfície.

3) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ (c) $f(x) = x^{3/2}$

(d) $f(x) = x^{-3/2}$ (e) $f(x) = x^{1/3} + x^{-1/4}$ (f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

4) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \tan(x) - x$ (b) $f(x) = x\tan(x)$ (c) $f(x) = \cot(x) + x$

(d) $f(x) = \dfrac{\cot(x)}{x}$ (e) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{\cot(x)}$ (f) $f(x) = \tan^2(x)$

5) Considere as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = x|x| \qquad \text{e} \qquad g(x) = e^{-|x|}\,.$$

Para cada uma destas funções,

(a) mostre que é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e calcule a derivada;

(b) estude a diferenciabilidade no ponto 0.

6) Calcule, se existirem, as derivadas laterais no ponto 0 da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}} & , \ x\neq 0\\[2ex] 0 & , \ x=0\ .\end{cases}$$

7) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x)=\cos(2x)-2\,\mathrm{sen}(x)$ (b) $f(x)=\mathrm{sen}(e^x)$ (c) $f(x)=\tan(x/2)-\cot(x/2)$

(d) $f(x)=\mathrm{sen}(\cos^2(x))\cos(\mathrm{sen}^2(x))$ (e) $f(x)=\dfrac{\mathrm{sen}^2(x)}{\mathrm{sen}(x^2)}$ (f) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

(g) $f(x)=(2-x^2)\cos(x^2)+2x\,\mathrm{sen}(x^3)$ (h) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ (i) $f(x)=\left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{1/3}$

(j) $f(x)=\cos^2(\sqrt{x})+\mathrm{sen}^2(1/x)$ (k) $f(x)=x(\mathrm{sen}(\sqrt{x})+\cos(1/x))$

8) Determine a derivada g' em termos de f' se:

(a) $g(x)=f(x^2)$ (c) $g(x)=f[f(x)]$

(b) $g(x)=f(\mathrm{sen}^2(x))+f(\cos^2(x))$ (d) $g(x)=(f\circ f\circ f)(x)$

9) Sendo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por $f(x)=x^4e^{-x}$, e sendo $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável, calcule $(g\circ f)'(x)$ em termos da função g'.

10) Sendo $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, considere a função $\phi:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ definida por $\phi(x)=e^{g(\log x)}$. Supondo conhecidos os valores de g, g' e g'' em pontos convenientes, determine $\phi'(1)$ e $\phi''(e)$.

11) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x)=\log(1+x^2)$ (b) $f(x)=x^2(1+\log x)$ (c) $f(x)=\log(\log x)$

(d) $f(x)=\log(1+\sqrt{x})$ (e) $f(x)=\log(1+\mathrm{sen}^2 x)$ (f) $f(x)=\log(1+\cos^2 x)$

(g) $f(x)=e^{\log x}$ (h) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ (i) $f(x)=e^{1/x}$ (j) $f(x)=e^{1/\sqrt{x}}$

(k) $f(x)=e^{\mathrm{sen}^2 x}$ (l) $f(x)=e^{\cos^2 x}$ (m) $f(x)=x^2e^x$ (n) $f(x)=xe^{x^2}$

(o) $f(x)=2^{\log x}$ (p) $f(x)=2^{\sqrt{x}}$ (q) $f(x)=2^{1/x}$ (r) $f(x)=2^{1/\sqrt{x}}$

(s) $f(x)=2^{\mathrm{sen}^2 x}$ (t) $f(x)=2^{\cos^2 x}$ (u) $f(x)=x^2 2^x$ (v) $f(x)=x2^{x^2}$

(w) $f(x)=x^x$ (x) $f(x)=x^{\log x}$ (y) $f(x)=(\log x)^x$ (z) $f(x)=x^{1/x}$

V. Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy. Extremos.

1) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos(ax))}{\log(\cos(bx))}$ (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \cot x - 1}{x^2}$

(d) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2^x}{x^2}$ (e) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2^x}{x^2}$ (f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{10^x - 5^x}{x}$

(g) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$ (h) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$ (i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{1000}}$

(j) $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(x)\log(x)$ (k) $\lim_{x\to 0^+} x \log\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ (l) $\lim_{x\to +\infty} x \log\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

(m) $\lim_{x\to 1^-} \log(x)\log(1-x)$ (n) $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen}(1/x)\log(x)$ (o) $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen}(1/x)e^x$

(p) $\lim_{x\to +\infty} x^{1/4} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ (q) $\lim_{x\to +\infty} x^2\left(\cos(1/x) - 1\right)$ (r) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(1/x)$

2) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to 1^+} (\log x)^{x-1}$ (b) $\lim_{x\to 0^+} x^{(e^x-1)}$ (c) $\lim_{x\to 0^-} (1-e^x)^x$ (d) $\lim_{x\to 0^+} (e^x-1)^x$

(e) $\lim_{x\to +\infty} (2+x^3)^{1/\log x}$ (f) $\lim_{x\to +\infty} (3+x^2)^{1/\log x}$ (g) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$ (h) $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x}$

(i) $\lim_{x\to 0} (1-\cos x)^x$ (j) $\lim_{x\to 0^+} (1/x)^{\operatorname{sen} x}$ (k) $\lim_{x\to +\infty} (\operatorname{sen}(1/x))^{1/x}$ (l) $\lim_{x\to +\infty} (\cos(1/x))^x$

(m) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$ (n) $\lim_{x\to +\infty} (\cos(1/x))^{x^2}$ (o) $\lim_{x\to +\infty} (\operatorname{sen}(1/x))^{1/x^2}$

(p) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{1/\log x}$ (q) $\lim_{x\to +\infty} (\operatorname{sen}(1/x))^{1/\log x}$ (r) $\lim_{x\to 0^+} (1-\cos x)^{1/\log x}$

(s) $\lim_{x\to 1^+} x^{\log(\log x)}$ (t) $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$ (u) $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x-1)}$ (v) $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)} - 1$

(w) $\lim_{x\to 0^-} (1-2^x)^{\operatorname{sen} x}$ (x) $\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\operatorname{sen} x}$ (y) $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\log x}$ (z) $\lim_{x\to 0^+} [\log(1/x)]^x$

3) Seja f uma função definida numa vizinhança de zero, $V_\varepsilon(0) =]-\varepsilon, +\varepsilon[$ com $\varepsilon > 0$, diferenciável em $V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ e tal que $xf'(x) > 0$ para todo o $x \in V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$.

(a) Supondo que f é contínua no ponto 0, prove que $f(0)$ é um extremo de f e indique se é mínimo ou máximo. No caso de f ser diferenciável no ponto 0, qual será o valor de $f'(0)$?

(b) Mostre, por meio de um exemplo, que sem a hipótese de continuidade de f no ponto 0 não se pode garantir que $f(0)$ seja um extremo de f.

4) Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(1) = f(-1) = 0$, mas que $f'(x)$ nunca é zero no intervalo $[-1, 1]$. Explique porque é que este facto não contraria o Teorema de Rolle.

5) Seja $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0 \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa. Justifique as suas respostas.

(a) Para qualquer $n \geq 2$, a função f tem máximo no intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$.
(b) A função f é limitada.
(c) A função f' tem infinitos zeros.

6) Use o Teorema de Lagrange para deduzir as seguintes desigualdades:
(a) $|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| \leq |x-y|\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}\,.$
(b) $ny^{n-1}(x-y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x-y)$ se $0 < y \leq x$ e $n \in \mathbb{N}$.

7) Seja ϕ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $\phi(n) = (-1)^n n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Prove que não existe $\lim_{x\to+\infty} \phi'(x)$.

8) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, com derivada crescente e tal que $f(0) = 0$. Mostre que a função definida por $g(x) = f(x)/x$ é crescente em $\mathbb{R}^+$.

9) Considere a função $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \log\sqrt{1-x^2} & , \ x \in]-1, 0] \\[2ex] x^2 e^{1-x^2} & , \ x \in]0, +\infty[\ . \end{cases}$$

(a) Estude a função f quanto à continuidade.
(b) Determine $\lim_{x\to-1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
(c) Defina a função f'.
(d) Determine os intervalos de monotonia de f e os pontos em que f tem um extremo local.

10) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2)}{x} & , \ x \neq 0 \\[2ex] 0 & , \ x = 0\ . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua no ponto zero e calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Diga, justificando, se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: a equação $f'(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções distintas em $\mathbb{R}$.

11) Supondo que f é uma função de classe C^1 em $[a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y| \quad \text{para quaisquer } x, y \in [a, b]\,.$$

12) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$ que satisfaz a desigualdade $f(x) \geq x^2$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = \alpha$.

13) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com $f'(0) = 0$ e $f''(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(\operatorname{sen} x)$.

(a) Determine e classifique os extremos locais da função φ.

(b) O que pode dizer sobre o número de soluções da equação $\varphi''(x) = 0$?

14) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente crescente e tal que

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty \, .$$

(a) Mostre que existe um único ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que $f'(a) = 0$, e que $m \overset{\text{def}}{=} f(a)$ é o mínimo absoluto de f.

(b) Dado qualquer valor $b \in]m, +\infty[$, mostre que o conjunto $f^{-1}(b) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : f(x) = b\}$ tem exactamente dois elementos.

15) Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que $\phi(n) = (-1)^n/n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Suponha que existe $\lim_{x\to+\infty} \phi'(x)$. O que pode dizer sobre o seu valor?

16) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, com derivada $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e limitada, e tal que $g(0) = 0$. Considere a função $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \frac{g(x)}{x} \, , \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \, .$$

Mostre que h é uma função limitada em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e prolongável por continuidade ao ponto zero.

17) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

(a) Mostre que $\lim_{x\to+\infty} [f(x + 2) - f(x)] = 0$.

(b) Será que se pode garantir que $\lim_{x\to+\infty} [f(2x) - f(x)] = 0$? Justifique.

18) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} \, , & \text{se } x < 0; \\[2ex] -\tan\left(\dfrac{x}{6 + x^2}\right) \, , & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = -1/6$.

(b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

(c) Prove que a equação $f'(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções distintas em $\mathbb{R}$.

19) Seja $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que

$$\phi(2n) = -2n \quad \text{e} \quad \phi(2n - 1) = 2n - 1 \, , \ \forall \, n \in \mathbb{N} \, .$$

(a) Mostre que a equação $\phi(x) = 0$ tem infinitas soluções em $\mathbb{R}^+$.

(b) Mostre que a equação $\phi'(x) = 0$ tem infinitas soluções em $\mathbb{R}^+$.

20) (a) Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = p \in \mathbb{R}$. Mostre que se $\lim_{x\to+\infty} g'(x)$ existe, então é igual a zero.
Sugestão: aplique o Teorema de Lagrange a intervalos da forma $[x, x + 1]$.

(b) Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com assímptota à direita de equação $y = mx + p \, , \ m, p \in \mathbb{R}$. Mostre que se $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ existe, então é igual a m.