Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LMAC E LEFT – 1º SEM. 2025/26
2ª FICHA DE EXERCÍCIOS

I. Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy. Extremos.

1) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cot x-1}{x^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{10^x-5^x}{x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{2^x}{x^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x^{1000}}$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x\log\left(\frac{x}{x+1}\right)$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}x\log\left(\frac{x}{x+1}\right)$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\log(x)\log(1-x)$ (j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\operatorname{sen}(1/x)e^x$ (k) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}x^2\left(\cos(1/x)-1\right)$

2) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}(\log x)^{x-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}(1-e^x)^x$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(2+x^3)^{1/\log x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^x$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1/x)^{\operatorname{sen} x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(\cos(1/x))^x$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(\cos(1/x))^{x^2}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{1/\log x}$

(q) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(\operatorname{sen}(1/x))^{1/\log x}$ (s) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}x^{\log(\log x)}$ (u) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^{(x^x-1)}$ (x) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{\operatorname{sen} x}$

3) Seja f uma função definida numa vizinhança de zero, $V_\varepsilon(0)=\,]-\varepsilon,+\varepsilon[$ com $\varepsilon>0$, diferenciável em $V_\varepsilon(0)\setminus\{0\}$ e tal que $xf'(x)>0$ para todo o $x\in V_\varepsilon(0)\setminus\{0\}$.

(a) Supondo que f é contínua no ponto 0, prove que $f(0)$ é um extremo de f e indique se é mínimo ou máximo. No caso de f ser diferenciável no ponto 0, qual será o valor de $f'(0)$?

(b) Mostre, por meio de um exemplo, que sem a hipótese de continuidade de f no ponto 0 não se pode garantir que $f(0)$ seja um extremo de f.

4) Seja $f(x)=1-x^{2/3}$. Mostre que $f(1)=f(-1)=0$, mas que $f'(x)$ nunca é zero no intervalo $[-1,1]$. Explique porque é que este facto não contraria o Teorema de Rolle.

5) Use o Teorema de Lagrange para deduzir as seguintes desigualdades:

(a) $|\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(y)|\le|x-y|\,,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\,.$

(b) $ny^{n-1}(x-y)\le x^n-y^n\le nx^{n-1}(x-y)$ se $0<y\le x$ e $n\in\mathbb{N}$.

6) Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\log(1+x^2)}{x} & ,\ x\neq 0\\[2ex] 0 & ,\ x=0\ .\end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua no ponto zero e calcule $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0)=1$.

(c) Diga, justificando, se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: a equação $f'(x)=0$ tem pelo menos duas soluções distintas em $\mathbb{R}$.

7) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$ que satisfaz a desigualdade $f(x) \geq x^2$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = \alpha$.

8) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente crescente e tal que

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty\ .$$

(a) Mostre que existe um único ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que $f'(a) = 0$, e que $m \overset{\text{def}}{=} f(a)$ é o mínimo absoluto de f.

(b) Dado qualquer valor $b \in]m, +\infty[$, mostre que o conjunto $f^{-1}(b) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : f(x) = b\}$ tem exactamente dois elementos.

9) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2}\,, & \text{se } x < 0; \\[2ex] -\tan\left(\dfrac{x}{6+x^2}\right)\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = -1/6$.

(b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

(c) Prove que a equação $f'(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções distintas em $\mathbb{R}$.

10) (a) Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = p \in \mathbb{R}$. Mostre que se $\lim_{x\to+\infty} g'(x)$ existe, então é igual a zero.
<u>Sugestão</u>: aplique o Teorema de Lagrange a intervalos da forma $[x, x+1]$.

(b) Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com assímptota à direita de equação $y = mx + p\,,\ m, p \in \mathbb{R}$. Mostre que se $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ existe, então é igual a m.

II. Representação gráfica de funções.

1) Nas alíneas seguintes, cada função está definida em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a fórmula dada para $f(x)$ faz sentido. Em cada caso, determine intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas de f, e esboce o seu gráfico.

(a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ (c) $f(x) = \dfrac{|x|}{1-|x|}$ (d) $f(x) = xe^{1/x}$

2) Considere a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, <u>contínua no ponto 0</u> e tal que

$$f(x) = \sqrt{x}\,\log(x),\ x > 0\,.$$

(a) Calcule $f(0)$.

(b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de f nos pontos com abcissa $x = 0$ e $x = 1$.

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

3) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log x & , \ x > 0 \\ \\ \dfrac{x^2}{1-x} & , \ x \leq 0 \ . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$.
(b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
(c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

4) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \ , \ \forall\, x \neq 0 \ .$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.
(b) Determine as concavidades e inflexões de f.
(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.
(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

III. Funções Trigonométricas e Hiperbólicas Inversas - II.

1) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x^2)}{x} \ , & \text{se } x < 0; \\ \\ \operatorname{sen}(x) \ , & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

2) Considere a função $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\log(1+x^2))}{x} \ , & \text{se } x > 0; \\ \\ \operatorname{arcsen}(x) \ , & \text{se } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-1, +\infty[\setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

3) Considere a função $f : [-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1-\cos(x)} - 1}{x} \ , & \text{se } x > 0; \\ \\ \operatorname{arcsen}(x/2) \ , & \text{se } -2 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-2,+\infty[\setminus\{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0)=1/2$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,f(0))$.

4) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{arcsen}(1/x)$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{sen}(1/x)}{\arctan(1/x)}$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan(x)\right)^{1/x}$

5) Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} \arctan\left(x^2\right) & , \ x\geq 0 \\ \\ xe^{1/x} & , \ x<0\ . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$.
(b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
(c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

IV. Polinómio e Teorema de Taylor.

1) Determine o polinómio de Taylor de grau 3 em $a=0$ da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{\mathrm{sen}\,x}$.

2) Determine o polinómio de Taylor de grau 5 em $a=0$ da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{\cos x}$.

3) Use o polinómio de Taylor para escrever cada um dos seguintes polinómios como um polinómio em potências de $(x-3)$.

i) x^2-4x-9 *ii)* $x^4-12x^3+44x^2+2x+1$ *iii)* x^5

4) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função de classe $C^5(\mathbb{R})$ com polinómio de Taylor de grau 5 em $a=0$ dado por:

$$i)\ p_{5,0}(x)=1+x^4\,; \qquad ii)\ p_{5,0}(x)=x^3-x^5\,.$$

Em cada um dos casos, determine $f^{(k)}(0)$, para $k=0,1,\ldots,5$, e indique justificando se f tem ou não um extremo local no ponto zero.

5) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função de classe $C^5(\mathbb{R})$ com polinómio de Taylor de grau 5 em $a=1$ dado por

$$p_{5,1}(x)=\frac{1}{2}x^2\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\,.$$

Determine $f^{(k)}(1)$, para $k=0,1,\ldots,5$, e indique justificando se f tem ou não um extremo local no ponto um.

6) Prove, usando o Teorema de Taylor, que $\left|e^{-x}-\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)\right|<\frac{1}{6}\,,\ \forall x\in[0,1]\,.$

7) Prove, usando o Teorema de Taylor, que $\left|\mathrm{sen}(x)-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\right|<0.01\,,\ \forall x\in[0,1]\,.$

8) Prove, usando o Teorema de Taylor, que $\left|\cos(x)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)\right|<0.1, \forall x\in[0,2].$

9) Prove, usando o Teorema de Taylor, que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $(n+1)$-vezes diferenciável e

$$f^{(n+1)}(x) = 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

então f é um polinómio de grau menor ou igual a n.

V. Primitivas Imediatas.

As fórmulas para as derivadas de algumas funções bem nossas conhecidas, conduzem à seguinte tabela de primitivas imediatas:

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \Rightarrow \int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,,\ \forall \alpha \neq -1$$

$$\frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|\,,\ \forall x \neq 0$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \Rightarrow \int e^x\,dx = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = (\log a)a^x \Rightarrow \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}\,,\ \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \Rightarrow \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \Rightarrow \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \Rightarrow \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = -\cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x \Rightarrow \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x \Rightarrow \int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{argsenh} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{argsenh} x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{argcosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{argcosh} x$$

Temos também que

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \Rightarrow \int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$$

e

$$\frac{d}{dx}(cf) = c\frac{df}{dx} \Rightarrow \int cf\,dx = c\int f\,dx\,, \text{ para qualquer constante } c \in \mathbb{R}.$$

Usando estes factos, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $2x^5$	2) $\dfrac{3}{\sqrt{x}} + \dfrac{x\sqrt{x}}{4}$	3) $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)^2$
4) $\dfrac{5}{\cos^2(x)}$	5) $\dfrac{4}{1+x^2}$	6) $-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
7) $3e^x + \sqrt{x}$	8) $\dfrac{1}{3x}$	9) $2\cos(x)$

VI. Primitivas Quase-Imediatas.

A fórmula para a derivada da função composta

$$(F(u(x)))' = F'(u(x)) \cdot u'(x)$$

diz-nos que

$$F(x) = \int f(x)\,dx \Rightarrow F(u(x)) = \int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx\,.$$

Esta fórmula, combinada com a tabela anterior de primitivas imediatas, conduz à seguinte tabela de primitivas quase-imediatas.

$$\int u(x)^\alpha u'(x)\,dx = \frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,,\ \forall \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \log|u(x)|$$

$$\int e^{u(x)}u'(x)\,dx = e^{u(x)}$$

$$\int a^{u(x)}u'(x)\,dx = \frac{a^{u(x)}}{\log a}\,,\ \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\int \cos(u(x))u'(x)\,dx = \operatorname{sen}(u(x))$$

$$\int \operatorname{sen}(u(x))u'(x)\,dx = -\cos(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}\,dx = \tan(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2(u(x))}\,dx = -\cot(u(x))$$

$$\int \cosh(u(x))u'(x)\,dx = \operatorname{senh}(u(x))$$

$$\int \operatorname{senh}(u(x))u'(x)\,dx = \cosh(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}\,dx = \operatorname{arcsen}(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\,dx = \arctan(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}}\,dx = \operatorname{argsenh}(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-1}}\,dx = \operatorname{argcosh}(u(x))$$

Temos assim por exemplo que

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} = -\log|\cos x|$$

e

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen} x} = \log|\operatorname{sen} x|$$

Usando estes factos, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}$	2) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	3) $\operatorname{sen}(2x)$
4) $x\operatorname{sen}(x^2)$	5) $\dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$	6) $x^2\cos(x^3-1)$
7) $\operatorname{sen}^3(x)\cos(x)$	8) e^{5x}	9) xe^{-x^2}
10) $e^x e^{e^x}$	11) $\dfrac{x}{1+x^2}$	12) $\dfrac{e^x}{2+e^x}$
13) $e^x\operatorname{sen}(e^x)$	14) $\dfrac{\cos(\log x)}{x}$	15) $\tan(2x)$
16) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(3x)}$	17) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	18) $\dfrac{x^3}{x^8+1}$
19) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$	20) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$	21) $\operatorname{senh}(2x+1)\cosh(2x+1)$

VII. Primitivação por Partes.

A fórmula para a derivada do produto de duas funções u e v,

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v' \Leftrightarrow u\cdot v' = (u\cdot v)' - u'\cdot v\,,$$

dá origem à **fórmula de primitivação por partes**:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx\,.$$

Esta fórmula é particularmente útil quando a função que queremos primitivar pode ser expressa como o produto de uma função u, cuja derivada é mais simples do que u, com uma função v' com primitiva imediata ou quase-imediata v.

Há dois truques que são usados de forma frequente na primitivação por partes. O primeiro é escrever $\int f(x)\,dx = \int 1\cdot f(x)\,dx$ e considerar $u = f$ e $v' = 1$. Obtem-se então que

$$\int f(x)\,dx = x\cdot f(x) - \int x\cdot f'(x)\,dx\,.$$

Por exemplo,

$$\int \log x\,dx = \int 1\cdot\log x\,dx = x\cdot\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\cdot\log x - \int 1\,dx = x\log x - x\,.$$

O segundo truque é usar primitivação por partes para encontrar $\int f$ em termos da própria $\int f$ e depois resolver em ordem à $\int f$. Por exemplo,

$$\int \frac{\log x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\cdot\log x\,dx = \log x\cdot\log x - \int \log x\cdot\frac{1}{x}\,dx = (\log x)^2 - \int \frac{\log x}{x}\,dx$$

pelo que

$$2\int \frac{\log x}{x}\,dx = (\log x)^2 \Rightarrow \int \frac{\log x}{x}\,dx = \frac{(\log x)^2}{2}\,.$$

Usando estes factos, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $x \operatorname{sen} x$	2) $x \log x$	3) $x^2 \cos x$
4) $\operatorname{sen}^2(x)$	5) $\cos^3(x)\operatorname{sen}^2(x)$	6) $\cos(\log x)$
7) $x \arctan x$	8) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$	9) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$
10) $\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$	11) $\operatorname{sen}(x)\log(1+\operatorname{sen} x)$	12) $x^2 \cosh x$

VIII. Primitivas de Funções Racionais.

Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $\dfrac{1}{x^2-1}$	2) $\dfrac{x^4}{1-x}$	3) $\dfrac{x}{x^2+x+1}$
4) $\dfrac{x+4}{x^2+1}$	5) $\dfrac{6+x}{(4-x^2)(x+2)}$	6) $\dfrac{3x+1}{x^3-x}$
7) $\dfrac{3x-1}{(x^2-1)(x+1)}$	8) $\dfrac{1+x^2}{x^3-2x^2+x}$	9) $\dfrac{3x^2+3x+2}{(x-1)(x^2+2x+1)}$
10) $\dfrac{1+x}{1-x^4}$	11) $\dfrac{x-2}{(1+x^2)(x+3)}$	12) $\dfrac{x^2+x-1}{(1+x^2)(x+3)}$
13) $\dfrac{x^2-x}{(x-2)(x^2-2x+2)}$	14) $\dfrac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}$	15) $\dfrac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}$

IX. Primitivação por Substituição.

Usando a substituição indicada, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $\dfrac{5}{2(x+1)(\sqrt{x}+2)}$, $x = t^2$

2) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{x+3}}$, $x+3 = t^2$

3) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+2x}}$, $1+2x = t^2$

4) $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$, $t^2 = \dfrac{x}{x+2}$

5) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$, $t^2 = 1+e^x$

6) $\dfrac{1}{x(1+\log^2(x))}$, $t = \log x$

7) $\dfrac{\cos x}{4+\operatorname{sen}^2(x)}$, $t = \operatorname{sen} x$

8) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}$, $t = \cos x$

9) $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{(1-\operatorname{sen} x)\cos^2(x)}$, $t = \operatorname{sen} x$

10) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, $t = \cos(x)$

11) $\dfrac{1}{\cosh x}$, $t = \operatorname{senh}(x)$

12) $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$, $t = \tan x$

13) $\sqrt{x^2-1}$, $x = \dfrac{1}{\cos t}$

14) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $x = \operatorname{sen} t$

15) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$, $x = \tan t$

16) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x = \dfrac{1}{\cos t}$