

2º EXAME DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
(LEIC-TP, LERC, LEGI E LEE)

1º SEM. 2008/09 02/FEV/2009, 9.00 - V. 2 DURAÇÃO: 2H

1. (1,0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \geq 1 + |x|\} .$$

2. (1,0 val.) Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n (3k + 2)k! 3^{k-1} = (n + 1)! 3^n - 1 .$$

3. (1,0 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$a) \frac{\arcsen(x)}{1 + \sinh(x^2)} ; \quad b) \int_{-\sqrt{x}}^{1/x} \log(1 + t^2) dt .$$

4. (0,5 val.) Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x/2} - 1)^{3x} .$$

5. (0,5 val.) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = 3 \quad \text{e} \quad x = 2 .$$

6. (1,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \arctan(\sen(x))}{x^2}, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Mostre que f é diferenciável em $x = 0$ com $f'(0) = 1/2$.
- (b) Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(1) = 0$ e $g'(1) = -2$. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de $(f \circ g)$ no ponto de abcissa $x = 1$.

7. (2,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $\frac{2x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}$

(b) $\frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$

(c) $(x \log(x))^2$

(d) $\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ (considere a mudança de variável $t^2 = x^2 - 1$)

8. (1,0 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a seguinte série de potências é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 3)^n}{2^n \sqrt{n + 1}}.$$

9. (1,0 val.) Seja $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e considere a função $g : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt, \quad \forall x \geq 1.$$

(a) Mostre que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x)}{\log(x)} = f(1)$.

(b) Mostre que se f for crescente então $\frac{g(x)}{\log(x)} \leq f(x)$, $\forall x > 1$.

10. (1,0 val.)

(a) Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Prove que h é diferenciável em $x = 0$ com $h'(0) = 0$.

(b) Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões tais que

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad b_{n+1} \leq b_n \quad \text{e} \quad a_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prove que existe pelo menos um ponto $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.