Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$2^{\underline{o}}$ EXAME DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I (LEIC-TP, LERC, LEGI E LEE)

$1^{\underline{o}}$ SEM. 2008/09 02/FEV/2009, 9.00 - V. 1 DURAÇÃO: 2H

1. (1,0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ |x+2| \geq 1 + |x|\} \ .$$

2. (1,0 val.) Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1)k!\, 2^{k-1} = (n+1)!\, 2^n - 1 \ .$$

3. (1,0 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$a) \ \frac{1 + \operatorname{arcsen}(x)}{\cosh(x^2)} \ ; \qquad\qquad b) \ \int_{-1/x}^{\sqrt{x}} \log(1+t^2)\ dt \, .$$

4. (0,5 val.) Calcule:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(e^{x/3} - 1\right)^{2x} \ .$$

5. (0,5 val.) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$x = 0\,, \quad y = 0\,, \quad y = \frac{1}{x}\,, \quad y = 2 \quad \text{e} \quad x = 3\,.$$

6. (1,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(\operatorname{sen}(x)) - x}{x^2}\,, & \text{se } x \neq 0; \\ \\ 0\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é diferenciável em $x = 0$ com $f'(0) = -1/2$.

(b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(1) = 0$ e $g'(1) = 2$. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de $(f \circ g)$ no ponto de abcissa $x = 1$.

7. (2,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $\dfrac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) $\dfrac{x^2+1}{x^3+2x^2+x}$

(c) $(x\log(x))^2$

(d) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (considere a mudança de variável $t^2 = x^2-1$)

8. (1,0 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a seguinte série de potências é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n\sqrt{n+1}} \,.$$

9. (1,0 val.) Seja $f : [1,+\infty[\,\to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e considere a função $g : [1,+\infty[\,\to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt \,, \ \forall x \geq 1 \,.$$

(a) Mostre que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)}{\log(x)} = f(1)$.

(b) Mostre que se f for crescente então $\dfrac{g(x)}{\log(x)} \leq f(x)\,,\ \forall x > 1$.

10. (1,0 val.)

(a) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$h(x) = \begin{cases} x^2\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ \\ 0\,, & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Prove que h é diferenciável em $x = 0$ com $h'(0) = 0$.

(b) Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões tais que

$$a_n \leq a_{n+1}\,, \quad b_{n+1} \leq b_n \quad \text{e} \quad a_n \leq b_n\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Prove que existe pelo menos um ponto $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.