Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$1^{\underline{o}}$ EXAME DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I (LEIC-TP, LERC, LEGI E LEE)

$1^{\underline{o}}$ SEM. 2008/09 19/JAN/2009, 9.00 - V. 1 DURAÇÃO: 2H

1. (1,0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o conjunto

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ |2x+1| \geq x^2 \right\} .$$

2. (1,0 val.) Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{k!\, 2^k} = 1 - \frac{1}{n!\, 2^n} .$$

3. (1,0 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$a) \ \operatorname{sen}(x) \cos\left(\frac{x}{x+1}\right) ; \qquad b) \ \int_0^{\sqrt{x}} t e^{t^2+x} \, dt .$$

4. (0,5 val.) Calcule:

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{\arctan(x)}} .$$

5. (0,5 val.) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = x^3 , \quad y = -\frac{2x}{3} \quad \text{e} \quad y = 1 .$$

6. (1,0 val.) Considere a função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arcsen}(x) - x}{x^2} , & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{0\}; \\ 0 , & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é diferenciável em $x = 0$ com $f'(0) = 1/6$.

(b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(0) = 1$ e $g'(0) = -6$. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de $h = (g \circ f)$ no ponto de abcissa $x = 0$.

7. (2,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $\dfrac{\cosh(x)}{\sqrt{1+\operatorname{senh}(x)}}$

(b) $\dfrac{x^2}{(x+2)(x^2+3x+2)}$

(c) $(xe^x)^2$

(d) $\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{2x-3}}$ (considere a mudança de variável $t^2 = 2x-3$)

8. (1,0 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a seguinte série de potências é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{n(n+4)}} \,.$$

9. (1,0 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^{-1} \cdot \displaystyle\int_0^x f\,, & \text{se } x \neq 0; \\ \\ f(0)\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que g é contínua no ponto zero e diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Mostre que se f for diferenciável no ponto zero então g também é diferenciável nesse ponto e $g'(0) = f'(0)/2$.

10. (1,0 val.) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva (i.e. $h(x) > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$) tal que

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} h(x)\ .$$

(a) Prove que h tem máximo.

(b) Denotando esse máximo por $M \in \mathbb{R}^+$, prove que o contradomínio de f é o intervalo $]0, M]$.